Г.П. КЛИМОВ
А.Д. КУЗЬМИН

# Вероятность, процессы, статистика.

## Задачи с решениями

Г.П. КЛИМОВ
А.Д. КУЗЬМИН

# Вероятность процессы, статистика.

## Задачи с решениями

*Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по специальности «Прикладная математика»*

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
1985

УДК 519.2

**Климов Г. П., Кузьмин А. Д.** Вероятность, процессы, статистика. Задачи с решениями.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985.— 232 с.

Книга содержит 199 задач с решениями по основным разделам теории вероятностей, случайных процессов и математической статистики, включаемых в начальный курс. Перед каждой темой дается перечень основных теоретических положений.

Цель сборника задач — помочь усвоению теоретического материала. Задачи «нечисловые», и формулировка их не использует «прикладных» терминов. Многие из задач имеют форму утверждений, которые предлагается доказать. Перечень основных теоретических положений может быть использован также для промежуточного контроля знаний.

© Издательство Московского университета, 1985

# ОГЛАВЛЕНИЕ


**Часть 1. ВЕРОЯТНОСТЬ** . . . . . 5

Введение . . . . . 5

**Глава 1. Дискретное вероятностное пространство** . . 6

§ 1. Событие и вероятность . . . . . 6
Задачи 1—20 . . . . . 10
Решения задач 1—20 . . . . . 13
§ 2. Случайная величина. Математическое ожидание . . . . . 22
Задачи 21—30 . . . . . 24
Решения задач 21—30 . . . . . 25
§ 3. Моменты. Производящая функция. Примеры дискретных распределений. Неравенство Маркова — Чебышева. Закон больших чисел. Центральная предельная теорема . . . . . 28
Задачи 31—60 . . . . . 34
Решения задач 31—60 . . . . . 40

**Глава 2. Вероятностное пространство** . . . . 55

§ 1. Общие понятия . . . . . 55
Задачи 61—90 . . . . . 71
Решения задач 61—90 . . . . . 77
§ 2. Многомерное нормальное распределение . . . 97
Задачи 91—100 . . . . . 100
Решения задач 91—100 . . . . . 102
Ответы к задачам ч. 1 . . . . . 110

**Часть 2. ПРОЦЕССЫ** . . . . . 111

Введение . . . . . 111
§ 1. Теорема Колмогорова о построении процесса по частным распределениям. Марковские процессы со счетным числом состояний . . . . . 112
Задачи 101—120 . . . . . 123
Решения задач 101—120 . . . . . 129
§ 2. Процессы восстановления . . . . . 144
Задачи 121—130 . . . . . 147
Решения задач 121—130 . . . . . 150
§ 3. Регенерирующие процессы . . . . . 156
Задачи 131—134 . . . . . 157
Решения задач 131—134 . . . . . 159

§ 4. Виды сходимости сл. в. Теорема Прохорова. Сходимость характеристических функций. Центральная предельная теорема . . . . . 160
Задачи 135—150 . . . . . 164
Решения задач 135—150 . . . . . 166

**Часть 3. СТАТИСТИКА** . . . . . 176

Введение . . . . . 176
§ 1. Упорядочение статистических решающих процедур. Статистические структуры. Достаточная, полная, свободная статистики. Несмещенные оценки с минимальной дисперсией. Часто используемые распределения . . . . . 179
Задачи 151—180 . . . . . 187
Решения задач 151—180 . . . . . 194
§ 2. Неравенство Крамера — Рао. Эффективные оценки. Оценки максимального правдоподобия. Метод наименьших квадратов . . . . . 210
Задачи 181—191 . . . . . 216
Решения задач 181—191 . . . . . 218
§ 3. Интервальные оценки. Статистический критерий. Функция мощности. Лемма Неймана — Пирсона . . . . . 223
Задачи 192—199 . . . . . 227
Решения задач 192—199 . . . . . 229

# Часть 1. ВЕРОЯТНОСТЬ

## *Введение*

Теория вероятностей есть математический анализ понятия случайного эксперимента. Событие и вероятность являются основными понятиями этой теории. При формализации этих понятий исходят из теоретико-множественной модели теории вероятностей, предложенной А. Н. Колмогоровым в 1929 г.

Предполагается, что результат, или исход, случайного эксперимента не может быть определен. Пусть $\Omega = \{\omega\}$ есть множество всех исходов и $A$ есть некоторое событие, связанное с рассматриваемым экспериментом. Естественно считать, что по исходу эксперимента можно сказать, осуществилось ли событие $A$ или нет. Поэтому событие $A$ можно отождествить с некоторой совокупностью исходов, т. е. считать, что событие есть подмножество элементов из $\Omega$. Сами же элементы $\omega \in \Omega$ можно тогда называть элементарными событиями. В этом случае объединение, пересечение и дополнение событий совпадают с соответствующими теоретико-множественными операциями, а класс событий, включающий интересующие нас события, должен быть замкнут относительно этих операций, т. е. объединение, пересечение и дополнение событий являются событиями.

Вероятность же есть числовая характеристика (функция) класса событий, свойства которой должны быть аналогичны свойствам частоты осуществления события.

Прежде чем перейти к формализации и исследованию этих понятий, при общих предположениях в первой главе рассматривается частный, но довольно распространенный случай, когда множество элементарных событий не более чем счетно.

# Глава 1. ДИСКРЕТНОЕ ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОСТРАНСТВО

## § 1. СОБЫТИЕ И ВЕРОЯТНОСТЬ

Пусть $\Omega=\{\omega\}$ — конечное или счетное множество. Элементы множества $\Omega$ будем называть элементарными событиями, а само множество $\Omega$ — пространством элементарных событий.

Любое подмножество $A$ множества $\Omega$ назовем событием. Обозначим через $S$ класс подмножеств множества $\Omega$ (иначе: $S$ — класс событий).

Пусть, далее, каждому $\omega\in\Omega$ сопоставлено число $P(\omega)$ такое, что

$$P(\omega)\geqslant 0, \quad \sum_{\omega\in\Omega} P(\omega)=1.$$

Число $P(\omega)$ называется вероятностью элементарного события $\omega$. Под вероятностью события $A$ понимается число

$$P(A)=\sum_{\omega\in A} P(\omega).$$

**Пример 1.** Пусть

$$\Omega=\{\omega_1, \ldots, \omega_N\}, \ P(\omega_k)=1/N \ \forall k,$$

тогда

$$P(A)=r/N=|A|/|\Omega|,$$

где $r=|A|$ — число элементарных событий, содержащихся в событии $A$. Это есть классическая модель теории вероятностей.

Выше введены три объекта:

$\Omega$ — конечное или счетное множество (пространство элементарных событий);

$S$ — класс всех (!) подмножеств множества $\Omega$ (класс событий);

$P$ — числовая функция, определенная на $S$ (при этом $P(A)$ есть вероятность события $A\in S$).

Отметим, что выполнены следующие свойства:

А1. Класс $S$ является $\sigma$-алгеброй, т. е.

1) $A\in S$ влечет $A^c=\Omega\setminus A\in S$,

2) $A_i\in S$ для $i=1, 2, \ldots$ влечет $\bigcup A_i\in S$, $\bigcap A_i\in S$.

А2. Числовая функция $P$, определенная на $S$,

1) нормирована, т. е. $P(\Omega)=1$,

2) неотрицательна, т. е. $P(A) \geqslant 0$ для всех $A \in S$,

3) $\sigma$-аддитивна, т. е. $P(\Sigma A_i) = \Sigma P(A_i)$. Здесь $\Sigma A_i = \bigcup A_i$, когда $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$. События $A$ и $B$ такие, что $A \cap B = \varnothing$, называются **несовместимыми.**

Тройка объектов $(\Omega, S, P)$ называется **вероятностным пространством.** Отметим, что основной предмет исследования в теории вероятностей есть вероятностное пространство. Это пространство мы определили для случая, когда $\Omega$ — не более чем счетное множество.

Для задания вероятностного пространства (в дискретном случае) достаточно задать множество $\Omega = \{\omega_k\}$ и отображение $\omega_k \mapsto p_k = P(\omega_k)$ такое, что $p_k \geqslant 0$ и $\Sigma p_k = 1$.

Из приведенных свойств A1 и A2 следует (показать!), в частности, что:

1) $\varnothing \in S$ и $P(\varnothing) = 0$;

2) для событий $A$ и $B$ включение $A \subset B$ влечет $P(A) \leqslant P(B)$;

3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$;

4) $P(\bigcup A_k) \leqslant \Sigma P(A_k)$;

5) если $A_n \uparrow A$, то $P(A) = \lim\limits_{n \to \infty} P(A_n)$;

6) если $A_n \downarrow A$, то $P(A) = \lim\limits_{n \to \infty} P(A_n)$.

Здесь $A_n \uparrow A$ означает

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \text{ и } A = \bigcup A_n,$$

а $A_n \downarrow A$ означает

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \text{ и } A = \bigcap A_n.$$

Отметим еще, что иногда событие $\Omega$ называется **достоверным**, а событие $\varnothing$ — **невозможным.**

События $A$ и $B$ независимы, если $P(AB) = P(A) \times P(B)$.

Пусть $\{A_i : i \in I\}$ — семейство событий. Говорят, что события этого семейства **взаимно независимы**, или **независимы в совокупности**, если

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

для всякого конечного набора $J$ индексов из $I$.

Пусть $A$ и $B$ — события. Число $P(AB)/P(A)$, если только $P(A) \neq 0$, называется условной вероятностью события $B$ относительно $A$ (иногда говорят:

при условии, что совершилось событие $A$) и обозначается $P_A(B)$, или $P(B|A)$, или $P(B;A)$. Число $P_A(B)$ не определено, если $P(A)=0$. Таким образом,

$$\boxed{P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)}.$$

Пусть $\Omega=\Sigma E_k$ и $P(E_k)>0$. Тогда имеет место формула полной вероятности

$$\boxed{P(A)=\sum_k P(E_k)\cdot P_{E_k}(A)}.$$

Пусть опять $\Omega=\Sigma E_k$ и известно распределение событий $E_k$, т. е. известны все $P(E_k)$. Пусть произошло событие $A$. Каково новое распределение событий $E_k$ при поступлении этой новой информации? Более точно, это означает: найти $P_A(E_k)$ через

$$P(E_i) \text{ и } P_{E_i}(A)\ \forall i.$$

Ответ дается формулой Байеса

$$\boxed{P_A(E_k)=\frac{P(E_k)\cdot P_{E_k}(A)}{\sum_i P(E_i)\cdot P_{E_i}(A)}}.$$

Предполагается, что

$$P(A)>0 \text{ и } P(E_i)>0\ \forall i.$$

Отметим, что часто набор $\{P(E_i)\}$ называют априорным распределением, а набор $\{P_A(E_i)\}$ — апостериорным распределением относительно события $A$ (при условии, что произошло событие $A$).

Многие классические модели теории вероятностей сводятся к следующим примерам.

**Пример 2.** Ящик содержит $m$ шаров. Среди них $m_1$ белых и $m_2$ черных шаров, $m_1+m_2=m$. Шары тщательно перемешиваются. Извлекается один шар, запоминается его цвет, и шар возвращается обратно. Производится $n$ таких извлечений шара. После каждого возвращения шары тщательно перемешиваются. Пусть $A_k$ — событие, состоящее в том, что $k$ извлеченных шаров были белые (а $n-k$ — черные). Найдем вероятность этого события.

Если все шары занумеровать числами 1, 2, .., $m$,

то результат $n$ извлечений можно представить в виде

$$\omega = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n),$$

где $\varepsilon_i$ означает номер шара после $i$-го извлечения; тем самым, каждое $\varepsilon_i$ принимает $m$ значений $1, 2, \ldots, m$. За пространство элементарных событий примем $\Omega = \{\omega\}$ и положим $P(\omega) = 1/|\Omega|$. Множество $\Omega$ состоит из $|\Omega| = m^n$ элементарных событий. Множество же $A_k$ состоит из

$$|A_k| = C_n^k m_1^k m_2^{n-k}$$

элементарных событий. Следовательно,

$$p_k = P(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega|} = C_n^k \left(\frac{m_1}{m}\right)^k \left(\frac{m_2}{m}\right)^{n-k},$$

или

$$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}; \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

где

$$p = m_1/m, \; q = 1 - p = m_2/m.$$

Набор таких чисел $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ называется биномиальным распределением с параметрами $n$ и $p$.

**Пример 3.** Рассмотрим эту же модель извлечения шаров, но без возвращения. Найдем снова вероятность $P(A_k)$ события $A_k$, состоящего в том, что среди $n$ извлеченных шаров $k$ шаров оказались белыми. Ясно, что в данном случае $n \leqslant m$. Опять занумеруем все шары числами $1, 2, \ldots, m$. Тогда результат $n$ извлечений записывается в виде

$$\omega = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n),$$

где $\varepsilon_i$ обозначает номер шара после $i$-го извлечения и **все числа** $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ **различны**. Если $\Omega = \{\omega\}$, то

$$|\Omega| = m(m-1) \ldots (m-n+1) = m^{(n)}.$$

Событие $A_k$ состоит из

$$|A_k| = C_n^k m_1^{(k)} m_2^{(n-k)}$$

элементарных событий. Следовательно,

$$p_k = P(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega|} = C_n^k \frac{m_1^{(k)} \cdot m_2^{(n-k)}}{m^{(n)}}; \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Набор $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ этих чисел называется гипергеометрическим распределением.

**Пример 4.** Будем считать, что $m$ шаров раскрашены не в два цвета, как в предыдущих примерах, а в $r$ цветов. И пусть $m_i$ означает число шаров $i$-го цвета; $i=1, ..., r$; $m_1+ ... +m_r=m$. Рассмотрим в этом примере схему извлечения шаров с возвращением. Пусть $A_k$ – событие, заключающееся в том, что после $n$ извлечений $k_1$ шаров оказались 1-го цвета, ..., $k_r$ шаров оказались $r$-го цвета; здесь $k=(k_1, ..., k_r)$, $k_1+ ... +k_r=n$. Тогда

$$P_k = P(A_k) = \frac{n!}{k_1! \dots k_r!} p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r},$$

где $p_i=m_i/m$, а $k$ принимает значения из $\{k= =(k_1, ..., k_r) : k_i \geqslant 0, k_1+ ... +k_r=n\}$. Набор $\{P_k\}$ этих чисел называется мультиномиальным распределением.

**Пример 5.** Если теперь шары извлекаются без возвращения, то

$$P_k = P(A_k) = \frac{n!}{k_1! \dots k_r!} \cdot \frac{m_1^{(k_1)} \dots m_r^{(k_r)}}{m^{(n)}}, \quad n \leqslant m.$$

Набор $\{P_k\}$ этих чисел называется многомерным гипергеометрическим распределением.

### ЗАДАЧИ 1—20

1. Показать, что $A \supset B$ влечет $P(A \setminus B) = =P(A)-P(B)$.

2. Доказать, что

$$P(A \triangle B) = P(A)+P(B)-2P(AB) = P(A \cup B)-P(AB).$$

Здесь $A \triangle B$ есть симметрическая разность событий $A$ и B, т. е. $A \triangle B=(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (AB) = =AB^c \cup A^cB$.

3. Показать, что

$$P(A \cup B \cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-$$

$$-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

4. Игральная кость подбрасывается один раз. Описать вероятностное пространство. Описать событие $A$, состоящее в выпадении не менее 5 очков. Вычислить вероятность этого события.

5. Игральная кость подбрасывается дважды. Описать вероятностное пространство. Описать события:

$A$ — сумма очков равна 10,

$B$ — по крайней мере один раз появится 6 очков.

Найти вероятности событий $A$, $B$, $AB$.

6. Игральная кость подбрасывается дважды. Рассмотрим события:

$A$ — сумма очков есть четное число,

$B$ — сумма очков не меньше 10.

Найти вероятность того, что осуществится лишь одно из событий $A$ или $B$.

7. Игральная кость подбрасывается до тех пор, пока не выпадет «шестерка». Описать вероятностное пространство. Найти вероятности следующих событий:

$A$ — «шестерка» выпадет за первые два подбрасывания,

$B$ — число подбрасываний нечетно.

8. Сделано три выстрела по мишени. Пусть $A_i$ есть событие, состоящее в том, что при $i$-м выстреле есть попадание. Выразить через события $A_1$, $A_2$, $A_3$ следующие события:

$A$ — произошло три попадания,

$B$ — не произошло ни одного попадания,

$C$ — было только одно попадание,

$D$ — было не менее двух попаданий.

9. Пусть $\{A_n : n=1, 2, ...\}$ — последовательность событий; $B_m$ — событие, состоящее в том, что среди событий $A_1$, $A_2$, ... первым произойдет $A_m$. Выразить $B_m$ через $A_1$, ..., $A_m$. Доказать, что события $B_1$, $B_2$, ... попарно несовместимы. Выразить событие $\bigcup\limits_{n\geq 1} B_n$ через $A_1$, $A_2$, ... .

10. Правильная монета бросается до тех пор, пока не выпадет герб два раза подряд. Описать вероятностное пространство. Найти вероятность того, что число бросаний будет четным.

11. Правильная монета бросается до тех пор, пока она не выпадет дважды подряд одной стороной. Описать вероятностное пространство. Найти вероятность того, что число бросаний будет четным.

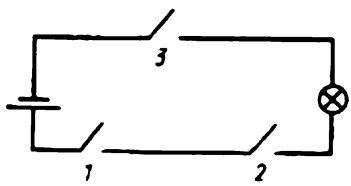


Рис. 1

12. Предположим, что в электрической цепи, см.

рис. 1, могут выходить из строя (размыкая цепь) лишь контакты 1, 2, 3. Надежность каждого контакта (т. е. вероятность того, что контакт не выйдет из строя за рассматриваемый промежуток времени) равна $q$. Построить вероятностное пространство. Рассмотрим события:

$A_i$ — не работает $i$-й контакт,

$A$ — не работает лишь один из контактов,

$B$ — лампочка не горит.

Найти $P_A(A_i)$ и $P_B(A_i)$.

**13.** Три игрока $a$, $b$, $c$ равной силы проводят шахматный турнир по схеме: в первом туре играют $a$ и $b$, игрок $c$ свободен. Затем в каждом следующем туре победитель предыдущего играет с отдыхавшим. Турнир продолжается до тех пор, пока один из игроков не выиграет подряд две партии. Ничейных партий нет. Построить вероятностное пространство. Вычислить вероятность событий:

$A$ — победителем будет $a$,

$B$ — победителем будет $b$,

$C$ — победителем будет $c$,

$D$ — победитель не выяснится до $n$-го тура.

**14.** Пусть $P_m$ — вероятность того, что среди событий $A_1, \ldots, A_n$ произойдет $m$ событий. Показать, что

$$P_m = \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k C_{m+k}^m S_{m+k},$$

где

$$S_k = S_k(A_1, \ldots, A_n) = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} P(A_{i_1} \ldots A_{i_k}).$$

**15.** В лифт вошло $n=3$ пассажира. Лифт останавливается на $N=7$ этажах. Найти вероятность того, что все пассажиры выйдут на разных этажах.

**16.** $n$ лиц, среди которых есть $A$ и $B$, строятся в шеренгу в произвольном порядке. Найти вероятность того, что $A$ и $B$ окажутся рядом. Найти вероятность того, что между $A$ и $B$ будет находиться $r$ лиц.

**17.** Показать, что из независимости событий $A$ и $B$ следует независимость событий $A$ и $B^c$, а также $A^c$ и $B^c$.

**18.** Положим

$$A^\sigma = \begin{cases} A, & \text{если } \sigma = 0, \\ A^c, & \text{если } \sigma = 1. \end{cases}$$

Пусть события $A_1, \ldots, A_n$ независимы. Показать, что события $A_1^{\sigma_1}, \ldots, A_n^{\sigma_n}$ также независимы. Здесь $\sigma_k = 0$ или $1$ $\forall k$.

19. Предположим, что события $A$ и $B_1$ независимы и события $A$ и $B_2$ также независимы. Показать, что события $A$ и $B_1 \cup B_2$ независимы, если и только если события $A$ и $B_1 B_2$ независимы.

20. Монета бросается $n$ раз. Событие $A$ состоит в том, что герб выпадает не более одного раза. Событие $B$ состоит в том, что герб и решка выпадают не менее одного раза каждый. Показать, что:

при $n=2$ события $A$ и $B$ зависимы,

при $n=3$ события $A$ и $B$ независимы,

при $n=4$ события $A$ и $B$ зависимы.

## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 1—20

1. Событие $A$ есть объединение несовместных событий $B$ и $A \setminus B$. Аддитивность вероятности дает $P(A) = P(B) + P(A \setminus B)$, откуда $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$.

2. В силу предыдущей задачи

$$P(A \triangle B) = P(A \cup B) - P(AB),$$
$$P(B \setminus A) = P(B) - P(AB).$$

Следовательно,

$$P(A \triangle B) = P(A \cup B) - P(AB) = P(B \setminus A) +$$
$$+ P(A) - P(AB) = P(B) - P(AB) + P(A) - P(AB) =$$
$$= P(A) + P(B) - 2P(AB).$$

3. Из предыдущей задачи следует, что

$$P(A \cup B) = P(A \triangle B) + P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Теперь

$$P(A \cup B \cup C) = P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) +$$
$$+ P(C) - P((A \cup B) C) = P(A) + P(B) - P(AB) +$$
$$+ P(C) - P(AC \cup BC) = P(A) + P(B) +$$
$$+ P(C) - P(AB) - [P(AC) + P(BC) - P(ACBC)].$$

4. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$, где событие $\omega_i$ состоит в выпадении $i$ очков. Элементарные события равно-

вероятны, $P(\omega_i)=1/6$. $A=\{\omega_5, \omega_6\}$, $P(A)=|A|/|\Omega|=2/6$.

5. $\Omega=\{\omega_{ij}: i=\overline{1,6},\ j=\overline{1,6}\}$, $P(\omega_{ij})=1/|\Omega|=1/36$, где событие $\omega_{ij}$ состоит в выпадении $i$ очков при первом подбрасывании и $j$ очков — при втором подбрасывании.

$$A=\{\omega_{46}, \omega_{55}, \omega_{64}\},\ B=\{\omega_{61}, \ldots, \omega_{65}, \omega_{66}, \omega_{56}, \ldots, \omega_{16}\},$$

$$AB=\{\omega_{46}, \omega_{64}\},\ P(A)=3/36,\ P(B)=11/36,$$

$$P(AB)=2/36.$$

6. Вероятностное пространство совпадает с вероятностным пространством предыдущей задачи. $A=\{\omega_{ij}: i+j$ четно$\}$, $P(A)=|A|/|\Omega|=18/36=1/2$. $B=\{\omega_{46}, \omega_{55}, \omega_{64}, \omega_{56}, \omega_{65}, \omega_{66}\}$, $P(B)=6/36=1/6$. $AB=\{\omega_{46}, \omega_{55}, \omega_{64}, \omega_{66}\}$, $P(AB)=4/36$. Согласно задаче 2

$$P(A\triangle B)=P(A)+P(B)-2P(AB)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-2\cdot\frac{1}{9}=\frac{8}{18}=\frac{4}{9}.$$

7. $\Omega=\{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k-1}, 6): \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k-1}\in\{1, 2, \ldots, 5\},\ k\geqslant 1\}$, событие $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k-1}, 6)$ состоит в выпадении очков $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k-1}$, отличных от 6 при первых $k-1$ подбрасываниях и выпадении 6 при $k$-м подбрасывании, $P(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k-1}, 6)=1/6^k$ (все $6^k$ исходов $k$ подбрасываний равновероятны). Проверим, что сумма вероятностей элементарных исходов равна 1.

$$\sum_{k\geqslant 1}\ \sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k-1}} P(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k-1}, 6)=\sum_{k\geqslant 1} 5^{k-1}\cdot\frac{1}{6^k}=1.$$

$$A=\{(6); (\varepsilon_1, 6),\ \varepsilon_1=\overline{1, 5}\},\ P(A)=1/6+5\cdot 1/6^2=11/36.$$

$$B=\{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2k}, 6): k\geqslant 0\},$$

$$P(B)=1/6+5^2\cdot 1/6^3+5^4\cdot 1/6^5+\ldots=6/11.$$

9. $B_m=A_1^c\ldots A_{m-1}^c A_m$. События $B_i$ и $B_j$ при $i<j$ содержатся в несовместных событиях $A_i$ и $A_i^c$ соответственно и, следовательно, несовместны. $\bigcup\limits_{m\geqslant 1} B_m=\bigcup\limits_{n\geqslant 1} A_n$.

10. **Решение 1.** $\Omega=\{\omega\}$, $\omega=(n_1, \ldots, n_k)$ при $n_j>n_{j-1}+1$, $j=\overline{2, k-1}$, $n_k=n_{k-1}+1$, $k\geqslant 2$, где событие $(n_1, \ldots, n_k)$ состоит в выпадении при $n_k$ подбрасываниях: герба при подбрасываниях с номерами $n_1, \ldots, n_k$

(подбрасывания нумеруются в порядке выполнения), решки при подбрасываниях с остальными номерами от 1 до $n_k$, $P(n_1, \ldots, n_k) = 1/2^{n_k}$. Проверим, что $\sum P(\omega) = 1$. Так как $n_1 = u_1 + 1$, $n_2 = n_1 + u_2 + 2$, ..., $n_{k-1} = n_{k-2} + u_{k-1} + 2$, $n_k = n_{k-1} + 1$, $u_1 \geqslant 0, \ldots, u_{k-1} \geqslant 0$, то

$$\sum P(\omega) = \sum_{k \geqslant 2} \sum_{u_1 \geqslant 0, \ldots, u_{k-1} \geqslant 0} 2^{-n_k} =$$

$$= \sum_{k \geqslant 2} \sum_{u_1 \geqslant 0, \ldots, u_{k-1} \geqslant 0} 2^{-(u_1+1)} 2^{-(u_2+2)} \ldots 2^{-(u_{k-1}+2)} 2^{-1} =$$

$$= \sum_{k \geqslant 2} 2^{-(k-1)} \sum_{u_1 \geqslant 0} 2^{-(u_1+1)} \ldots \sum_{u_{k-1} \geqslant 0} 2^{-(u_{k-1}+1)} =$$

$$= \sum_{k \geqslant 2} 2^{-(k-1)} = 1.$$

Для событий: $A$ — число подбрасываний четное, $B_i$ — впервые герб выпадает при $i$-м подбрасывании, имеем

$$A = \sum_{i \geqslant 1} AB_{2i} + \sum_{i \geqslant 1} AB_{2i-1},$$

$$AB_{2i} = \{(n_1, \ldots, n_k) : n_1 = 2i,$$

$$(n_2 - n_1 - 1, \ldots, n_k - n_1 - 1) \in A^c, \ k > 2\},$$

$$AB_{2i-1} = \{(n_1, \ldots, n_k) : n_1 = 2i - 1,$$

$$(n_2 - n_1 - 1, \ldots, n_k - n_1 - 1) \in A, \ k > 2\} \cup$$

$$\cup \{(2i - 1, 2i)\},$$

$$P(A) = \sum_{i \geqslant 1} P(AB_{2i}) + \sum_{i \geqslant 1} P(AB_{2i-1}) =$$

$$= \sum_{i \geqslant 1} 2^{-(2i+1)} P(A^c) + \sum_{i \geqslant 1} [2^{-2i} P(A) + 2^{-2i}] =$$

$$= \frac{1}{6} P(A^c) + \frac{1}{3} [P(A) + 1] =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} P(A), \quad P(A) = 3/5.$$

**Решение 2.** В качестве пространства элементарных событий возьмем $\Omega = \bigcup_{k \geqslant 2} \Omega_k$, где

$$\Omega_2 = \{(\Gamma\Gamma)\}, \ \Omega_3 = \{(\text{РГГ})\},$$

$\Omega_{n+3}=\{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\text{РГГ}) : \varepsilon_i\varepsilon_{i+1}\neq\text{ГГ}\}$, $n\geqslant 1$, $\varepsilon_i=\text{Р}$ или Г, Р=решка, Г=герб. Если $\omega\in\Omega_k$, то положим $P(\omega)=2^{-k}$. Пусть $\alpha_n=|\Omega_{n+3}|$, тогда

$$\alpha_0=1,\ \alpha_1=2,\ \alpha_n=\alpha_{n-1}+\alpha_{n-2} \text{ при } n\geqslant 2$$

(так как при $\varepsilon_n=\text{Р}$ число элементов множества

$$\{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}\text{Р}) : \varepsilon_i\varepsilon_{i+1}\neq\text{ГГ}\}$$

равно $\alpha_{n-1}$, а при $\varepsilon_n=\text{Г}$ должно быть $\varepsilon_{n-1}=\text{Р}$ и тогда число элементов множества

$$\{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-2}\text{РГ}) : \varepsilon_i\varepsilon_{i+1}\neq\text{ГГ}\}$$

равно $\alpha_{n-2}$). Положим $\alpha(z)=\sum\limits_{n\geqslant 0}\alpha_n z^n$, тогда, умножая равенство $\alpha_n=\alpha_{n-1}+\alpha_{n-2}$ на $z^n$ и суммируя по $n\geqslant 2$, получим

$$\alpha(z)-1-2z=z[\alpha(z)-1]+z^2\alpha(z),$$

или

$$\alpha(z)[1-z-z^2]=1+z.$$

Искомая вероятность равна

$$P=\sum_{k\geqslant 1}P(\Omega_{2k})=\frac{1}{4}+\sum_{k\geqslant 0}|\Omega_{(2k+1)+3}|\cdot 2^{-(2k+1)-3}=$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\sum_{k\geqslant 0}\alpha_{2k+1}2^{-(2k+1)}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\times$$

$$\times\left[\alpha\left(\frac{1}{2}\right)-\alpha\left(-\frac{1}{2}\right)\right].$$

Так как $\alpha(1/2)=6$, $\alpha(-1/2)=2/5$, то

$$P=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\left(6-\frac{2}{5}\right)=3/5.$$

Отметим, что $P(\Omega)=1$. В самом деле,

$$P(\Omega)=\frac{1}{4}-\sum_{k\geqslant 0}\alpha_k 2^{-(k+3)}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\alpha\left(\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cdot 6=1.$$

**Решение 3.** Результат бросания монет до прекращения игры имеет вид

$$\underbrace{(\text{Р}\ldots\text{Р})}_{x_1}[\text{ГР}]^1\underbrace{(\text{Р}\ldots\text{Р})}_{x_2}[\text{ГР}]^2\ldots\underbrace{(\text{Р}\ldots\text{Р})}_{x_{n-1}}[\text{ГР}]^{n-1}\times$$

$$\times \underbrace{(\text{Р} \ldots \text{Р})}_{x_n}{}^{n} [\text{ГГ}]$$

(что означает: при первых $x_1$ бросаниях выпадала только решка, затем герб и снова решка, в последующих $x_2$ бросаниях выпадала решка и т. д.), при этом число бросаний равно $2n+k$, где

$$x_1 + \ldots + x_n = k,\ k \geqslant 0,\ n \geqslant 1.$$

Через $\Omega_{nk}$ обозначим множество исходов указанного вида. В качестве пространства элементарных событий возьмем $\Omega = \bigcup_{k \geqslant 0,\ n \geqslant 1} \Omega_{nk}$. Для $\omega \in \Omega_{nk}$ положим $P(\omega) = 2^{-(2n+k)}$.

Отметим, что $|\Omega_{nk}|$ равно числу неотрицательных решений в целых числах уравнения

$$x_1 + \ldots + x_n = k,\ x_i \geqslant 0.$$

Это число равно коэффициенту $A_{nk}$ в разложении

$$\frac{1}{(1-z)^n} = \sum_{k \geqslant 0} A_{nk} z^k = A_n(z).$$

Искомая вероятность равна

$$P = \sum_{\substack{m \geqslant 0 \\ n \geqslant 1}} P(\Omega_{n,2m}) = \sum_{\substack{m \geqslant 0 \\ n \geqslant 1}} A_{n,2m} \cdot 2^{-(2n+2m)} =$$

$$= \sum_{n \geqslant 1} 2^{-2n} \cdot \frac{1}{2}\left[A_n\left(\frac{1}{2}\right) + A_n\left(-\frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= \sum_{n \geqslant 1} 2^{-2n} \cdot \frac{1}{2}\left[2^n + \frac{2^n}{3^n}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n \geqslant 1} [2^{-n} + 6^{-n}] = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{5}\right] = \frac{3}{5}.$$

**11. Решение 1.** Положим $\Omega = \Omega_\Г + \Omega_\Р$, где

$$\Omega_\Г = \{\alpha_2, \alpha_3, \ldots\}, \quad \Omega_\Р = \{\beta_2, \beta_3, \ldots\},$$

| | |
|---|---|
| $\alpha_2 = \Г\Г$ | $\beta_2 = \Р\Р$ |
| $\alpha_3 = \Г\Р\Р$ | $\beta_3 = \Р\Г\Г$ |
| $\alpha_4 = \Г\Р\Г\Г$ | $\beta_4 = \Р\Г\Р\Р$ |
| $\alpha_5 = \Г\Р\Г\Р\Р$ | $\beta_5 = \Р\Г\Р\Г\Г$ |
| . . . . | . . . . |

Положим

$$P(\alpha_k) = P(\beta_k) = 2^{-k},\ k \geqslant 2.$$

Тогда $P(\Omega) = 2P(\Omega_\Gamma) = 2\sum_{k\geqslant 2} 2^{-k} = 1$.

Искомая вероятность равна

$$P = \sum_{k\geqslant 1} P(\alpha_{2k}) + \sum_{k\geqslant 1} P(\beta_{2k}) = 2\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{1}{4}\right)^k = 2/3.$$

**Решение 2.** $\Omega = \{\omega_{1k}, \omega_{2k} : k \geqslant 2\}$, где события $\omega_{1k}$ и $\omega_{2k}$ состоят в поочередном выпадении герба и решки при $k-1$ подбрасывании, причем для $\omega_{1k}$ $(k-1)$-е и $k$-е подбрасывания приводят к выпадению герба, а для $\omega_{2k}$ — решки. $P(\omega_{ik}) = 2^{-k}$, $i = 1, 2$; $k \geqslant 2$. $\Sigma P(\omega_{ik}) =$ $= \sum_{i=1}^{2}\sum_{k\geqslant 2} 2^{-k} = 1$. Искомая вероятность равна

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{k\geqslant 1} P(\omega_{i,2k}) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{k\geqslant 1} 2^{-2k} = 2/3.$$

**12.** Пусть $\Omega = \{\omega\}$, где элементарное событие $\omega$ имеет вид $\omega = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$; здесь $\varepsilon_i$ указывает состояние $i$-го контакта: $\varepsilon_i = 0$ означает, что контакт исправен; иначе $\varepsilon_i = 1$. Табл. 1 указывает возможные значения элементарных событий и их вероятностей. Тогда

Таблица 1

| $\omega$ | $\varepsilon_1$ | $\varepsilon_2$ | $\varepsilon_3$ | $P(\omega)$ |
|---|---|---|---|---|
| $\omega_1$ | 0 | 0 | 0 | $q^3$ |
| $\omega_2$ | 0 | 0 | 1 | $pq^2$ |
| $\omega_3$ | 0 | 1 | 0 | $pq^2$ |
| $\omega_4$ | 1 | 0 | 0 | $pq^2$ |
| $\omega_5$ | 0 | 1 | 1 | $p^2q$ |
| $\omega_6$ | 1 | 0 | 1 | $p^2q$ |
| $\omega_7$ | 1 | 1 | 0 | $p^2q$ |
| $\omega_8$ | 1 | 1 | 1 | $p^3$ |

$p = 1 - q$

$A_1 = \{\omega_4, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$,

$A_2 = \{\omega_3, \omega_5, \omega_7, \omega_8\}$,

$A_3 = \{\omega_2, \omega_5, \omega_6, \omega_8\}$,

$A = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$,

$B = \{\omega_5, \omega_6, \omega_8\}$,

$$P_A(A_1) = \frac{P(A_1A)}{P(A)} = \frac{P(\omega_4)}{P(A)} = \frac{pq^2}{3pq^2} = 1/3.$$

Аналогично, $P_A(A_i) = 1/3\ \forall i$. Далее,

$$P_B(A_1) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{P(\omega_6, \omega_8)}{P(B)} = \frac{p^2q + p^3}{2p^2q + p^3} = \frac{1}{1+q}.$$

Аналогично, $P_B(A_2) = \frac{1}{1+q}$. Наконец,

$$P_B(A_3) = \frac{P(A_3B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

13. Пусть $\Omega = \{\alpha_2, \alpha_3, \ldots; \beta_2, \beta_3, \ldots\}$, где $\alpha_k$ и $\beta_k$ — возможные состояния игры. Здесь индекс $k$ у $\alpha_k$ или $\beta_k$ обозначает число сыгранных партий, а символы $\alpha$ или $\beta$ означают, что в первой партии выиграл шахматист $a$ или $b$ соответственно. Можно записать

$$\alpha_2 = aa,\ \alpha_3 = acc,\ \alpha_4 = acbb, \ldots, \alpha_7 = \underbrace{acb}\ \underbrace{acbb}, \ldots;$$

$$\beta_2 = bb,\ \beta_3 = bcc,\ \beta_4 = bcaa, \ldots, \beta_7 = \underbrace{bca}\ \underbrace{bcaa}, \ldots,$$

где, например, $\alpha_3$ означает, что в первой партии выиграл $a$, а во второй $c$ и в третьей тоже $c$.

Положим

$$P(\alpha_k) = P(\beta_k) = 2^{-k},\ k \geqslant 2.$$

Очевидно, что $P$ есть вероятность ($P(\Omega) = 1$).

$$A = \{\alpha_2, \alpha_5, \ldots; \beta_4, \beta_7, \ldots\} = \{\alpha_{3k-1}, \beta_{3k+1} : k \geqslant 1\},$$

$$B = \{\alpha_4, \alpha_7, \ldots; \beta_2, \beta_5, \ldots\} = \{\alpha_{3k+1}, \beta_{3k-1} : k \geqslant 1\},$$

$$C = \{\alpha_{3k}, \beta_{3k} : k \geqslant 1\},$$

$$D = \{\alpha_k, \beta_k : k > n\}.$$

Это дает

$$P(C) = 2\sum_{k \geqslant 1} 2^{-3k} = 2/7;$$

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}[1 - P(C)] = 5/14;$$

$$P(D) = 2\sum_{k > n} 2^{-k} = 1/2^{n-1}.$$

14. Для $J \subset \{1, \ldots, n\}$ будем обозначать

$$A_J = \bigcap_{i \in J} A_i,\ A_J^{(c)} = \prod_{i \in J^c} A_i^c.$$

Тогда искомое событие

$$B_m = \sum_{|J| = m} A_J A_{J^{(c)}}.$$

В произведении

$$\prod_{k=1}^{n} \left(x 1_{A_k} + 1_{A_k^c}\right)$$

коэффициент при $x^m$ равен $\sum_{|J| = m} 1_{A_J A_{J^c}} = 1_{B_m}$. Следовательно,

$$\prod_{k=1}^{n}\left[1-(1-x)1_{A_k}\right]=\sum_{m=0}^{n}x^m 1_{B_m}.$$

С другой стороны,

$$\prod_{k=1}^{n}\left[1-y1_{A_k}\right]=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k y^k\xi_k,\quad \xi_k=\sum_{|J|=k}1_{A_J}.$$

Итак,

$$\sum_{m=0}^{n}x^m 1_{B_m}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(1-x)^k\xi_k.$$

Взяв математические ожидания обеих частей полученного равенства и дифференцируя по $x$, имеем

$$m!\,P_m=\frac{d^m}{dx^m}\Big|_{x=0}\sum_{i=0}^{n}x^i P_i=$$

$$=\frac{d^m}{dx^m}\Big|_{x=0}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(1-x)^k S_k=$$

$$=\sum_{k=m}^{n}(-1)^k(-1)^m k^{(m)}S_k=\sum_{i=0}^{n-m}(-1)^i(m+i)^{(m)}S_{m+i}.$$

Теперь результат следует из того, что

$$\frac{(m+i)^{(m)}}{m!}=C_{m+i}^{m}.$$

**15.** $\Omega=\{\omega=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3):\varepsilon_i=\overline{1,7};\ i=\overline{1,3}\}$, где $\varepsilon_i$ указывает этаж, на котором вышел $i$-й пассажир, $P(\omega)=1/|\Omega|=1/7^3$.

$A=\{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$: $\varepsilon_i$ различны$\}$, $P(A)=7^{(3)}/7^3=30/49$.

**16.** $\Omega=\{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$: перестановка $n$ лиц$\}$, $P(\omega)=1/n!$, где $\varepsilon_i$ — лицо, стоящее на $i$-м месте в шеренге. Событие $A_r$ состоит в том, что между $A$ и $B$ находятся $r$ лиц. Имеем

$$A_r=\sum_{l=1}^{n-r-1}\{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n):\varepsilon_l=A,\ \varepsilon_{l+r+1}=B\}+$$

$$+\sum_{l=1}^{n-r-1}\{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n):\varepsilon_l=B,\ \varepsilon_{l+r+1}=A\},$$

$$P(A_r)=2(n-r-1)(n-2)!/n!=\frac{2(n-r-1)}{n(n-1)}.$$

Случай, когда $A$ и $B$ окажутся рядом, отвечает $r=0$.

17. $P(AB^c) = P(A \setminus AB) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)P(B^c)$. Применяя доказанное к $A$ и $B^c$, получим независимость $A^c$ и $B^c$.

18. Достаточно показать, что $A_1^c, A_2, \ldots, A_n$ независимы (тогда, применяя доказанное, несколько раз придем к независимости $A_1^{\alpha_1}, \ldots, A_n^{\alpha_n}$). Нужно проверить, что

$$P\left(A_1^c A_{i_1} \ldots A_{i_k}\right) = P\left(A_1^c\right) P(A_{i_1}) \ldots P\left(A_{i_k}\right),$$

$$1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n.$$

В силу независимости для $B = A_{i_2} \ldots A_{i_k}$ имеем

$$P(B) = P(A_{i_2}) \ldots P\left(A_{i_k}\right),$$

$$P(A_1 B) = P(A_1) P(A_{i_2}) \ldots P\left(A_{i_k}\right) = P(A_1) P(B).$$

Используя предыдущую задачу, получим

$$P\left(A_1^c B\right) = P\left(A_1^c\right) P(B) = P\left(A_1^c\right) P(A_{i_2}) \ldots P\left(A_{i_k}\right).$$

**19. Решение 1.** Если $A$ и $B_1 \cup B_2$ независимы, то

$$P(AB_1 \cup AB_2) = P(A)\left[P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 B_2)\right],$$

$$P(AB_1) + P(AB_2) - P(AB_1 B_2) = P(A) P(B_1) +$$

$$+ P(A) P(B_2) - P(A) P(B_1 B_2),$$

откуда, учитывая $P(AB_1) = P(A) P(B_1)$, $P(AB_2) = P(A) P(B_2)$, получаем

$$P(AB_1 B_2) = P(A) P(B_1 B_2).$$

Обратно, если $A$ и $B_1 B_2$ независимы, то те же выкладки показывают, что $A$ и $B_1 \cup B_2$ независимы.

**Решение 2.** Результат непосредственно получается из

$$P(A(B_1 \cup B_2)) - P(A) P(B_1 \cup B_2) =$$

$$= P(A) P(B_1 B_2) - P(A(B_1 B_2)).$$

**20.** Событие $C_k$ состоит в выпадении $k$ гербов при $n$ подбрасываниях монеты. $P(C_k) = C_n^k 2^{-n}$ согласно биномиальному распределению.

$$A = C_0 + C_1, \quad P(A) = 2^{-n} + C_n^1 2^{-n} = (n+1) 2^{-n},$$

$$B=\sum_{k=1}^{n-1} C_k, \quad B^c=C_0+C_n,$$

$$P(B)=1-2\cdot 2^{-n}=1-2^{-n+1},$$

$$AB=C_1 \text{ при } n\geqslant 2,\ P(AB)=n2^{-n}.$$

Независимость $A$ и $B$ равносильна тому, что

$$(n+1)2^{-n}(1-2^{-n+1})=n2^{-n},$$

т. е. $n+1=2^{n-1}$, что верно при $n=3$ и неверно при $n=2,4$.

## § 2. СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ

В теории вероятностей произвольное отображение $\xi:\Omega\to R^1$ пространства $\Omega=\{\omega_k\}$ элементарных событий в действительную прямую $R^1$ принято называть действительной **случайной величиной** (д. с. в.) Отображение $\xi:\Omega\to R^n$ называется векторной случайной величиной; здесь $R^n$ — $n$-мерное векторное пространство. Напомним, что это определение дается лишь для случая, когда $\Omega$ — не более чем счетное множество элементарных событий.

Д. с. в. $\xi$ называется **суммируемой**, если ряд

$$\sum_k \xi(\omega_k)P(\omega_k)$$

сходится абсолютно. В этом случае значение этого ряда, т. е. число

$$E\xi=E\sum_{\omega\in\Omega}\xi(\omega)P(\omega)$$

называется **математическим ожиданием** (или средним значением) д. с. в. $\xi$.

**Лемма 1.** Пусть д. с. в. $\xi$ принимает значения $x_1, x_2, \ldots$ на попарно непересекающихся множествах $A_1, A_2, \ldots$. Тогда для суммируемости д. с. в. необходима и достаточна абсолютная сходимость ряда

$$\sum_k x_k P(A_k).$$

Кроме того,

$$E\xi=\sum_k x_k P(A_k).$$

Пусть $\xi$ и $\eta$ — д. с. в., принимающие значения

лишь из множеств $\{x_i\}$ и $\{y_j\}$ соответственно. По определению, д. с. в. $\xi$ и $\eta$ независимы, если события

$$\{\xi = x_i\} \text{ и } \{\eta = y_j\}$$

независимы для любой пары $(i, j)$. Аналогично определяется независимость в совокупности последовательности д. с. в.

**Лемма 2.** Если $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ — независимые в совокупности д. с. в., то д. с. в.

$$f_1(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{j_1}), \quad f_2(\xi_{i_2}, \ldots, \xi_{j_2}), \ldots,$$
$$f_m(\xi_{i_m}, \ldots, \xi_{j_m})$$

также независимы в совокупности (здесь $1 \leqslant i_1 \leqslant j_1 < i_2 \leqslant j_2 < \ldots < i_m \leqslant j_m \leqslant n$; $f_1, \ldots, f_m$ — произвольные действительные функции).

**Аддитивность м. о.** Пусть $\xi$ и $\eta$ — суммируемые д. с. в. и $\lambda$ — произвольное число, тогда $\xi+\eta$ и $\lambda\xi$ — суммируемые д. с. в. и

$$E(\xi+\eta) = E\xi + E\eta, \; E(\lambda\xi) = \lambda E\xi.$$

Этот факт следует из свойств абсолютно сходящихся рядов.

**Мультипликативность м. о.** Пусть $\xi$ и $\eta$ — суммируемые и независимые д. с. в., тогда д. с. в. $\xi \cdot \eta$ суммируема и

$$E(\xi\eta) = E\xi \cdot E\eta$$

(если не требовать независимости д. с. в. $\xi$ и $\eta$, то для суммируемости д. с. в. $\xi\eta$ недостаточно суммируемости д. с. в. $\xi$ и $\eta$ в отдельности).

Пусть $A$ — событие. Функция $1_A$, определяемая соотношением

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in A, \\ 0, & \text{если } \omega \in \overline{A}, \end{cases}$$

называется **индикатором** события $A$. В анализе такая функция называется характеристической функцией. В теории вероятностей и статистике последний термин используется для других функций.

Отметим основные свойства индикатора.

1. $1_A$ — суммируемая д. с. в.
2. $E1_A = P(A)$.
3. $1_A^k = 1_A$ для $k = 1, 2, \ldots$; $1_{A^c} = 1 - 1_A$,
$$1_{AB} = 1_A \cdot 1_B, \; 1_{A+B} = 1_A + 1_B.$$

**Пример** (использования индикатора). Так как $A \cup B = A + BA^c$, то

$$1_{A \cup B} = 1_A + 1_{BA^c} = 1_A + 1_B(1 - 1_A) =$$
$$= 1_A + 1_B - 1_{AB},$$

откуда

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

**ЗАДАЧИ 21—30**

**21.** Привести пример двух суммируемых сл. в., произведение которых не суммируемо.

**22.** Привести пример двух сл. в. $\xi$ и $\eta$ таких, что сл. в. $\xi$, $\eta$ и $\xi\eta$ суммируемы и $E(\xi\eta) \neq E\xi \cdot E\eta$.

**23.** Предположим, что сл. в. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и каждая принимает значение $+1$ и $-1$ с вероятностями $p$ и $q = 1 - p$ соответственно. Найти распределение сл. в. $\eta_n = \xi_1 \cdots \xi_n$, т. е. числа

$$p_n = P(\eta_n = +1) \text{ и } q_n = P(\eta_n = -1)$$

(воспользоваться равенством: $E\eta_n = E\xi_1 \cdots E\xi_n$).

**24.** Пусть сл. в. $\xi$ принимает конечное число неотрицательных значений $x_1, \ldots, x_r$. Доказать, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{E\xi^{n+1}}{E\xi^n} = \max(x_1, \ldots, x_r),$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{E\xi^n} = \max(x_1, \ldots, x_r).$$

**25.** Пусть $\xi$ — сл. в., принимающая целые неотрицательные значения и $E\xi < \infty$. Показать, что

$$E\xi = \sum_{i \geqslant 1} P(\xi \geqslant i).$$

**26.** Пусть сл. в. $\xi$ принимает значения $x_1, \ldots, x_m$, а сл. в. $\eta$ принимает значения $y_1, \ldots, y_n$. Кроме того, сл. в. $\xi^i$ и $\eta^j$ при $i = 1, \ldots, m-1$ и $j = 1, \ldots, n-1$ некоррелированы, т. е.

$$E\xi^i\eta^j = E\xi^i \cdot E\eta^j.$$

Показать, что сл. в. $\xi$ и $\eta$ независимы.

**27.** Написаны $n$ писем, но адреса на конвертах написаны в случайном порядке. Пусть $\xi_n$ — число писем, которые будут получены теми адресатами, которым они предназначены. Показать, что $E\xi_n = 1$.

**28.** Пусть $\xi$ и $\eta$ — независимые сл. в., принимающие значения $x_1, x_2, \ldots$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots$ и $q_1, q_2, \ldots$ соответственно. Вычислить

$$P(\xi=\eta).$$

**29.** Пусть $\xi$ и $\eta$ — независимые сл. в., принимающие неотрицательные целые значения и $E\xi<\infty$. Доказать, что

$$E\min(\xi,\ \eta)=\sum_{i\geqslant 1}P(\xi\geqslant i)\cdot P(\eta\geqslant i).$$

**30.** Двое бросают монету $n$ раз каждый. Найти вероятность того, что у них выпадет одинаковое количество гербов.

## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 21—30

**21.** $\Omega=\{1,\ 2, \ldots\}$, $P(n)=2^{-n}$, $\xi(n)=\eta(n)=2^{n/2}$.

$$E\xi=\sum_{n\geqslant 1}2^{n/2}\cdot 2^{-n}=\sum 2^{-n/2}<\infty.$$

$$E\xi\cdot\eta=E\xi^2=\Sigma 2^n\cdot 2^{-n}=\infty.$$

**22.** Пусть $\xi=1_A$, $\eta=1_B$. Тогда $\xi$, $\eta$, $\xi\eta$ — суммируемы,

$$E\xi\eta=E\xi\cdot E\eta\Leftrightarrow P(AB)=P(A)\cdot P(B).$$

В качестве $A$ и $B$ можно взять любые два события, не являющиеся независимыми, например, из задачи 20 при $n=2$.

**23.** $p_n+q_n=1$, $p_n-q_n=E\eta_n=E\xi_1\ldots E\xi_n=(p-q)^n$.

$$p_n=\frac{1}{2}[1+(p-q)^n],\quad q_n=\frac{1}{2}[1-(p-q)^n].$$

**24.** Обозначим $P(\xi=x_i)=p_i$. Имеем:

$$E\xi^n=\sum_{i=1}^{r}x_i^n p_i,\quad E\xi^{n+1}=\sum_{i=1}^{r}x_i^{n+1}p_i.$$

Будем считать нумерацию $x$-ов такой, что $x_1\geqslant x_2\geqslant\ldots\geqslant x_r$. Не ограничивает общность предположение $x_1>x_2$. Тогда

$$\frac{E\xi^{n+1}}{E\xi^n}=x_1\frac{\sum\left(\frac{x_i}{x_1}\right)^{n+1}p_i}{\sum\left(\frac{x_i}{x_1}\right)^{n}p_i}\to x_1\frac{p_1}{p_1}=x_1,$$

$$\sqrt[n]{E\xi^n} = x_1 \sqrt[n]{\sum \left(\frac{x_i}{x_1}\right)^n p_i} \to x_1, \quad n \to \infty,$$

где использовано, что $0 < x_i/x_1 < 1$ при $i > 1$.

25. $\xi = \sum_{i \geqslant 1} 1_{(\xi > i)} \Rightarrow E\xi = \sum E 1_{(\xi \geqslant i)} = \sum P(\xi \geqslant i)$.

26. Для произвольных полиномов

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i, \quad g(y) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j y^j$$

степеней, не превосходящих $m-1$ и $n-1$ соответственно, имеем:

$$Ef(\xi)\, g(\eta) = \sum_{i,j} a_i b_j E\xi^i \eta^j = \sum_{i,j} a_i b_j E\xi^i \cdot E\eta^j = \sum_i a_i E\xi^i \times$$

$$\times \sum_j b_j E\eta^j = Ef(\xi) \cdot Eg(\eta).$$

Для каждых $i$ и $j$ существуют полиномы $f_i(x)$ и $g_j(y)$, для которых

$$f_i(x_k) = \delta_{ik}, \; g_j(y_l) = \delta_{jl}$$

$\left[f_i(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{m} (x - x_k) \Big/ \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{m} (x_i - x_k)\right]$. Заметим, что

$$f_i(\xi) = 1_{(\xi = x_i)}, \quad g_j(\eta) = 1_{(\eta = y_j)},$$

$$f_i(\xi)\, g_j(\eta) = 1_{(\xi = x_i,\, \eta = y_j)}.$$

Следовательно,

$$P(\xi = x_i, \eta = y_j) = Ef_i(\xi) g_j(\eta) = Ef_i(\xi) \cdot Eg_j(\eta) =$$
$$= P(\xi = x_i) \cdot P(\eta = y_j).$$

27. Элементарные события $\omega = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ — перестановки чисел $1, \ldots, n$ — состоят в вариантах написания адресатов; $\varepsilon_i$ — адрес на $i$-м письме. $P(\omega) = 1/n!$ Имеем

$$\xi_n = \sum_{i=1}^{n} 1_{(\varepsilon_i = i)}, \quad E\xi_n = \sum_{i=1}^{n} P(\varepsilon_i = i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)!}{n!} = 1.$$

Отметим также, что $\operatorname{var} \xi_n = 1$. Действительно,

$$\xi_n = 1_{A_1} + \ldots + 1_{A_n}, \quad A_i = \{\varepsilon_i = i\},$$

$$\operatorname{var} \xi_n = \sum_1^n \operatorname{var} 1_{A_i} + \sum_{i \neq j} \operatorname{cov}(1_{A_i}, 1_{A_j}) =$$

$$= n \operatorname{var} 1_{A_i} + (n^2 - n) \operatorname{cov}(1_{A_i}, 1_{A_j}),$$

$$\operatorname{var} 1_{A_i} = E 1_{A_i} - (E 1_{A_i})^2 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2},$$

$$\operatorname{cov}(1_{A_i}, 1_{A_j}) = E 1_{A_i A_j} - E 1_{A_i} \cdot E 1_{A_j} = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2}.$$

Отметим еще, что согласно задаче 14 имеем $S_k = 1/k!$,

$$P(\xi_n = k) = P_k = \frac{1}{k!}\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \right.$$

$$\left. - \ldots + (-1)^{n-k} \frac{1}{(n-k)!}\right].$$

28. $P(\xi = \eta) = \sum\limits_i P(\xi = x_i, \ \eta = x_i) = \sum P(\xi = i) \cdot P(\eta = x_i) = \sum p_i q_i$.

29. Используем результат задачи 25:

$$E_{\min}(\xi, \eta) = \sum_{i \geqslant 1} P(\min(\xi, \eta) \geqslant i) =$$

$$= \sum_{i \geqslant 1} P(\xi \geqslant i, \ \eta \geqslant i) = \sum_{i \geqslant 1} P(\xi \geqslant i) \cdot P(\eta \geqslant i).$$

Сходимость ряда следует из мажорируемости его членов членами сходящегося ряда:

$$P(\xi \geqslant i) P(\eta \geqslant i) \leqslant P(\xi \geqslant i), \ \Sigma P(\xi \geqslant i) = E\xi < \infty.$$

30. В силу задачи 28, если $\xi$ и $\eta$ — количества выпадения герба у первого и второго лица соответственно, то

$$P(\xi = \eta) = \sum_{k=0}^{n} P(\xi = k) \cdot P(\eta = k) = \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k 2^{-n}\right)^2 =$$

$$= 2^{-2n} C_{2n}^n;$$

здесь использовано тождество

$$\sum_{k=0}^{n} \left[C_n^k\right]^2 = C_{2n}^n$$

(это тождество можно получить, сравнивая коэффициенты при $x^n$ полиномов

$$\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k\right)^2 = (1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k x^k\Big).$$

## § 3. МОМЕНТЫ. ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ. ПРИМЕРЫ ДИСКРЕТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ. НЕРАВЕНСТВО МАРКОВА — ЧЕБЫШЕВА. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ. ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

### 3.1. Моменты.

Пусть $\xi$ — д. с. в.; число $E\xi^k$ называется моментом $k$-го порядка (если д. с. в. $\xi^k$ не суммируема, то полагаем $E\xi^k=\infty$).

Число $E(\xi-E\xi)^k$ называется центрированным моментом $k$-го порядка. В частности, при $k=2$ получаем число $\operatorname{var}\xi=D\xi=E(\xi-E\xi)^2$, называемое дисперсией (или вариацией) д. с. в. $\xi$.

Для любой пары д. с. в. $\xi$ и $\eta$ числа

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta)=E(\xi-E\xi)(\eta-E\eta),$$

$$\operatorname{cor}(\xi, \eta)=\frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{(\operatorname{var}\xi\cdot\operatorname{var}\eta)^{1/2}}$$

называются соответственно ковариацией и корреляцией д. с. в. $\xi$ и $\eta$. Если $\operatorname{var}\xi=0$ и/или $\operatorname{var}\eta=0$, то $\operatorname{cor}(\xi, \eta)$ не определена.

Отметим, что всегда (показать!)

$$-1\leqslant\operatorname{cor}(\xi, \eta)\leqslant 1$$

и что для $\operatorname{cor}(\xi, \eta)=0$ достаточно независимости д. с. в. $\xi$ и $\eta$. Если $\operatorname{cor}(\xi, \eta)=0$, то д. с. в. $\xi$ и $\eta$ называются некоррелированными. На практике часто некоррелированность д. с. в. служит серьезным основанием в пользу их независимости (хотя это не всегда верно).

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые д. с. в. (достаточно попарной некоррелированности), $\xi=\xi_1+\ldots+\xi_n$, $E\xi_i^2<\infty\,\forall i$, тогда

$$D\xi=D\xi_1+\ldots+D\xi_n.$$

### 3.2. Производящая функция.

Пусть д. с. в. $\xi$ принимает значения $x_0, x_1, \ldots$ с вероятностями $p_0, p_1, \ldots$. Распределению вероятностей $\{p_k\}$, т. е. набору чисел $(p_0, p_1, \ldots)$ таких, что $p_k\geqslant 0$ для $\forall k$ и $\sum\limits_{k\geqslant 0} p_k=1$, поставим в соответствие комплексную функцию $p(z)$ комплексного аргумента $z$, определенную в круге $|z|<1$ степенным рядом

$$p(z) = \sum_{k \geq 0} p_k z^k.$$

Такая функция $p(z)$ называется **производящей функцией** набора чисел $\{p_k\}$ или распределения $\{p_k\}$. По производящей функции распределение восстанавливается однозначно, например, по формуле

$$p_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{p(z)}{z^{k+1}} dz; \quad k = 0,1,2, \ldots,$$

или по формуле

$$p_k = \frac{1}{k!} p^{(k)}(0).$$

Таким образом, отображение

$$\{p_k\} \rightarrow p(z), \ |z| < 1$$

является взаимно-однозначным.

**Пример 1.** Пусть $x_k = k$ для $\forall k$. Тогда

$$p(z) = Ez^{\xi},$$

$$E\xi = p'(1), \ E\xi^2 = p''(1) + p'(1),$$

$$E\xi^{(k)} = p^{(k)}(1); \ k = 1, 2, \ldots,$$

где $\xi^{(k)} = \xi(\xi-1) \ldots (\xi-k+1)$.

**Пример 2.** Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые д. с в., принимающие значения из множества $\mathcal{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$; $p_1(z), \ldots, p_n(z)$ — соответствующие производящие функции и $\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Тогда производящая функция, соответствующая д. с. в. $\xi$, равна

$$p(z) = p_1(z) \ldots p_n(z) \text{ при } |z| < 1.$$

Действительно, в силу мультипликативности м. о. для независимых д. с. в. имеем

$$p(z) = Ez^{\xi} = Ez^{\xi_1} \ldots z^{\xi_n} = Ez^{\xi_1} \ldots Ez^{\xi_n} =$$

$$= p_1(z) \ldots p_n(z).$$

### 3.3. Примеры дискретных распределений.

**Пример 3.** Биномиальное распределение.

а) Пусть $\xi$ — д. с. в., принимающая значения 1 или 0 с вероятностью $p$ и $q = 1 - p$ соответственно.

Тогда

$$E\xi = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p,$$

$$\operatorname{var} \xi = E(\xi - p)^2 = (1 - p)^2 p + (0 - p)^2 q = pq,$$

$$p(z) = Ez^{\xi} = pz + q.$$

б) Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — д. с. в., независимые и принимающие значения 1 или 0 с вероятностью $p$ и $q = 1 - p$ соответственно. Распределение д. с. в.

$$\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_n$$

называется биномиальным и обозначается $\mathrm{Bi}(n, p)$.

$E\xi = np$, $\operatorname{var} \xi = npq$, $p(z) = Ez^{\xi} = (pz + q)^n$.

Часто д. с. в. $\xi$ интерпретируется как число успешных испытаний в серии из $n$ независимых испытаний с постоянной вероятностью $p$ успешного испытания.

в) Д. с. в. $\xi$ принимает лишь значения $0, 1, \ldots, n$. Положим

$$p_k = P(\xi = k).$$

Определим $p_k$:

$$p(z) = Ez^{\xi} = \sum_{k=0}^{n} p_k z^k = (pz + q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} z^k,$$

откуда

$$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

г) Пусть д. с. в. $\xi_1$ и $\xi_2$ независимы и каждая имеет распределение $\mathrm{Bi}(n_1, p)$ и $\mathrm{Bi}(n_2, p)$ соответственно, тогда д. с. в. $\xi = \xi_1 + \xi_2$ имеет распределение $\mathrm{Bi}(n_1 + n_2, p)$. Это следует из

$$p(z) = Ez^{\xi} = Ez^{\xi_1} \cdot Ez^{\xi_2} = p_1(z)\, p_2(z) =$$
$$= (pz + q)^{n_1} (pz + q)^{n_2} = (pz + q)^{n_1 + n_2}$$

и взаимно-однозначного соответствия между распределениями и производящими функциями.

**Пример 4.** Распределение Пуассона.

а) Пусть д. с. в. $\xi$ принимает лишь значения 0, 1, 2, ...; при этом для некоторого $\lambda > 0$

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Такое распределение называется распределением Пуассона с параметром $\lambda$ и обозначается $\mathrm{Po}(\lambda)$.

$$p(z) = Ez^{\xi} = \sum_{k \geqslant 0} z^k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{\lambda(z-1)},$$

$$E\xi = p'(1) = \lambda; \ \operatorname{var}\xi = p''(1) + p'(1) - [p'(\lambda)]^2 = \lambda.$$

б) Пусть $\xi_1$ и $\xi_2$ — независимые д. с. в., имеющие распределения Пуассона с параметрами $\lambda_1$ и $\lambda_2$ соответственно. Тогда д. с. в. $\xi = \xi_1 + \xi_2$ имеет тоже распределение Пуассона с параметром $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Это следует из

$$p(z) = Ez^{\xi} = Ez^{\xi_1} \cdot Ez^{\xi_2} = e^{\lambda_1(z-1)} \cdot e^{\lambda_2(z-1)} = e^{\lambda(z-1)}.$$

**Пример 5.** Отрицательно-биномиальное распределение.

а) Пусть независимые испытания с постоянной вероятностью $p$ успеха проводятся до тех пор, пока не наступит успех. Пусть число проведенных испытаний равно $1+\xi$. Д. с. в. может принимать одно из значений 0, 1, 2, ... . При этом

$$P(\xi = k) = q^k p, \ k \geqslant 0, \ q = 1 - p,$$

$$p(z) = Ez^{\xi} = \frac{p}{1 - qz}, \quad E\xi = \frac{q}{p}, \ \operatorname{var}\xi = \frac{q}{p^2}.$$

Распределение д. с. в. $\xi$ обозначим через $\mathrm{Bi}^-(1, p)$.

б) Пусть проводятся те же испытания до тех пор, пока не наступит $n$ успехов. При этом число проведенных испытаний обозначим через $n+\xi$, $\xi = 0, 1, 2, \ldots$. Можно считать, что

$$\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_n,$$

где д. с. в. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и каждая из них имеет распределение $\mathrm{Bi}^-(1, p)$. Поэтому производящая функция д. с. в. $\xi$ равна

$$p(z) = \left(\frac{p}{1 - qz}\right)^n.$$

Распределение такой д. с. в. обозначим через $\mathrm{Bi}^-(n, p)$. Оно называется отрицательно-биномиальным распределением.

$$E\xi = nq/p, \ \operatorname{var}\xi = nq/p^2.$$

в) Найдем $p_k = P(\xi = k)$; $k = 0, 1, 2, \ldots$. Дифференцируя левую и правую части выражения

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{N \geqslant 0} z^N$$

$m$ раз, получим

$$\frac{m!}{(1-z)^{m+1}} = \sum_{N \geqslant m} N(N-1)\ldots(N-m+1)z^{N-m},$$

или

$$\frac{z^m}{(1-z)^{m+1}} = \sum_{N \geqslant m} C_N^m z^N, \quad |z| < 1.$$

Используя последнее тождество, получим

$$p(z) = \frac{p^n}{(1-qz)^n} = \frac{p^n}{(qz)^{n-1}} \cdot \frac{(qz)^{n-1}}{(1-qz)^n} =$$

$$= p^n \sum_{N \geqslant n-1} C_N^{n-1} (qz)^{N-n+1} =$$

$$= p^n \sum_{k \geqslant 0} C_{k+n-1}^{n-1} q^k z^k = \sum_{k \geqslant 0} p_k z^k,$$

где было положено $N - n + 1 = k$, откуда находим

$$p_k = C_{k+n-1}^{n-1} p^n q^k; \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

г) Если д. с. в. $\xi_1$ и $\xi_2$ независимы и имеют распределения $\mathrm{Bi}^-(n_1, p)$ и $\mathrm{Bi}^-(n_2, p)$ соответственно, то д. с. в. $\xi = \xi_1 + \xi_2$ имеет отрицательно-биномиальное распределение $\mathrm{Bi}^-(n_1 + n_2, p)$. Это следует из

$$p(z) = Ez^{\xi} = Ez^{\xi_1} \cdot Ez^{\xi_2} = \left(\frac{p}{1-qz}\right)^{n_1} \left(\frac{p}{1-qz}\right)^{n_2} =$$

$$= \left(\frac{p}{1-qz}\right)^{n_1+n_2}.$$

**Пример 6.** Приближение биномиального распределения пуассоновским.

Если в биномиальном распределении $\mathrm{Bi}(n, p)$ числа $n$ и $p$ меняются таким образом, что

$$n \to \infty, \quad np = \lambda = \mathrm{const},$$

то

$$C_n^k p^k q^{n-k} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}; \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Это можно доказать, используя формулу Стирлинга.

Более сильным утверждением является следующее:

$$\left|C_n^k p^k q^{n-k} - \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}\right| \leqslant 2np^2, \quad \lambda = np, \quad p \leqslant \frac{1}{2},$$

причем это неравенство справедливо для всех $k=0, 1, 2, \ldots$, если считать $C_n^k p^k q^{n-k} = 0$ при $k>n$.

Верно следующее более общее утверждение.

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые д. с. в., принимающие значения 1 или 0; при этом

$$P(\xi_s = 1) = p_s, \; P(\xi_s = 0) = q_s = 1 - p_s; \; s = 1, \ldots, n.$$

Положим:

$$\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_n,$$

$$\alpha_k = P(\xi = k), \quad \beta_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$\lambda = p_1 + \ldots + p_n, \quad \delta = p_1^2 + \ldots + p_n^2.$$

**Теорема.** Пусть $p_s \leqslant 1/2 \; \forall s$, тогда $|\alpha_k - \beta_k| \leqslant 2\delta \; \forall k$.

### 3.4. Неравенство Маркова.

$$\boxed{P\{|\xi| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{E|\xi|^k}{\varepsilon^k}}$$ для всякого $k>0$ и $\varepsilon>0$.

**Следствие.** Полагая $k=2$ и заменяя $\xi$ на $\xi - E\xi$, получаем неравенство Чебышева

$$P\{|\xi - E\xi| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\operatorname{var}\xi}{\varepsilon^2}.$$

### 3.5. Закон больших чисел.

Для каждого $n$ определим д. с. в. $\xi_1, \ldots, \xi_n$, независимые в совокупности и принимающие значения 1 или 0 с вероятностью $p$ и $q=1-p$ соответственно. Положим $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Часто в этом случае говорят об $n$ независимых испытаниях с постоянной вероятностью $p$ успешного испытания. Тогда $S_n$ — число успешных испытаний из $n$ испытаний.

**Замечание.** Соответствующее пространство $\Omega$ элементарных событий можно представить в виде

$$\Omega = \{\omega\}, \; \omega = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n),$$

где $\varepsilon_i$ принимают значения 1 или 0. При этом $|\Omega| =$

$=2^n$, $P(\omega)=p^k q^{n-k}$, где $k=k(\omega)=\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_n$, $\xi_i(\omega)=\varepsilon_i$.

Следующее утверждение носит название закона больших чисел.

**Теорема.** Для всякого $\varepsilon>0$

$$P\left\{\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\geqslant\varepsilon\right\}\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

**Замечание.** Это утверждение говорит о том, что доля $S_n/n$ успешных испытаний из $n$ испытаний при $n\to\infty$ приближается к вероятности одного успешного испытания (частота стремится к вероятности!).

### 3.6. Центральная предельная теорема.

Наряду с д. с. в. $S_n$ рассмотрим д. с. в.

$$S_n^*=\frac{S_n-ES_n}{\sqrt{\operatorname{var} S_n}}=\frac{S_n-np}{\sqrt{npq}}.$$

Положим для любого действительного числа $x$

$$F_n(x)=P\{S_n^*<x\}.$$

**Теорема.**

$$|F_n(x)-\Phi(x)|\leqslant\frac{p^2+q^2}{\sqrt{npq}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{npq}} \text{ для } \forall x,$$

где

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}\,du.$$

Это есть простейший вариант центральной предельной теоремы теории вероятностей.

#### ЗАДАЧИ 31—60

**31.** Показать, что

а) $E\xi^2=0$ равносильно $\xi=0$ почти наверное (т. е $P(\xi=0)=1$);

б) $\operatorname{var}\xi=0$ равносильно $\xi=c$ почти наверное для некоторого числа $c$.

**32.** Пусть $\xi$ — сл. в. и $E\xi^2<\infty$. Показать, что

$$E(\xi-c)^2\geqslant E(\xi-c_0)^2=\operatorname{var}\xi$$

для $c_0=E\xi$ и $\forall c$.

33. Пусть $\xi$ и $\eta$ — сл. в. с конечными моментами второго порядка. Показать, что

$$E(\eta - a\xi - b)^2 \geqslant E(\eta - a_0\xi - b_0)^2 = (1 - \rho^2)\operatorname{var}\eta$$

для всех чисел $a$ и $b$, где

$$a_0 = \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\operatorname{var}\xi}, \quad b_0 = E\eta - a_0 E\xi, \quad \rho = \operatorname{cor}(\xi, \eta);$$

если $\operatorname{var}\xi = 0$, то $a_0 = 0$.

34. Пусть $\xi$ и $\eta$ — сл. в. с конечными моментами второго порядка. Показать, что следующие утверждения равносильны.

1°. Для некоторых чисел $a$ и $b$

$\eta = a\xi + b$ почти наверное.

2°. $\rho = \operatorname{cor}(\xi, \eta) = +1$ или $-1$.

35. а) Пусть сл. в. $\xi_1$ и $\xi_2$ независимы, одинаково распределены и имеют конечные вторые моменты. Показать, что сл. в.

$$\eta_1 = \xi_1 + \xi_2 \text{ и } \eta_2 = \xi_1 - \xi_2$$

некоррелированы.

б) Привести пример некоррелированных, но зависимых сл. в.

36. Сл. в. $\xi$ имеет биномиальное распределение $\mathrm{Bi}(n, p)$ с $p = 1/2$. Найти $E\eta$, где $\eta = \sin\frac{\pi\xi}{2}$.

37. Пусть сл. в. $\xi$ принимает целые неотрицательные значения. Показать, что следующие утверждения равносильны.

1°. Сл. в. $\xi$ имеет геометрическое распределение, т. е.

$$P(\xi = k) = pq^k; \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

для некоторого числа $p = 1 - q$, $0 < p < 1$.

2°. $P(\xi - k = n / \xi \geqslant k) = P(\xi = n) \ \forall k, n$.

38. Сл. в. $\xi_1$ и $\xi_2$ независимы и имеют одно и то же геометрическое распределение. Доказать, что

$$P(\xi_1 = k / \xi_1 + \xi_2 = n) = \frac{1}{n+1}; \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Верно ли обратное утверждение?

39. Сл. в. $\xi_1$ и $\xi_2$ независимы и имеют распределение Пуассона с параметрами $\lambda_1$ и $\lambda_2$ соответственно.

Показать, что

$$P(\xi_1 = k/\xi_1 + \xi_2 = n) = C_n^k p^k q^{n-k}; \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

где

$$p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = 1 - q.$$

**40.** а) Сл. в. $\xi$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda$.

Вычислить $E\,\dfrac{1}{1+\xi}$.

б) Пусть производящая функция сл.в. $\xi$, принимающей целые неотрицательные значения, равна $p(z) = Ez^{\xi}$, $|z| \leqslant 1$. Показать, что при $\alpha > 0$

$$E\,\frac{1}{\xi + \alpha} = \int_0^1 z^{\alpha-1} p(z)\, dz.$$

**41.** Пусть $\xi_1$ и $\xi_2$ — независимые сл. в., имеющие геометрическое распределение

$$P(\xi_l = k) = p_l q_l^k; \quad l = 1, 2; \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Показать, что сл.в.

$$\xi = \min(\xi_1, \xi_2)$$

имеет геометрическое распределение. Найти параметр этого распределения.

**42.** В N телефонных автоматах ведутся разговоры. Длительность разговора, измеряемая в секундах, имеет геометрическое распределение с математическим ожиданием $\mu$. Найти среднее время ожидания до первого освобождения телефона-автомата.

**43.** Пусть $\xi$ — случайное число изделий. Каждое изделие с вероятностью $p$ является бракованным. Обозначим через $\xi_1$ число бракованных изделий, а через $\xi_2$ число небракованных изделий. Показать, что сл. в. $\xi_1$ и $\xi_2$ независимы тогда и только тогда, когда сл.в. $\xi$ имеет пуассоновское распределение.

**44.** Случайные величины $\xi_1$ и $\xi_2$ независимы и принимают значения $1, \ldots, N$;

$$P(\xi_1 = k) = P(\xi_2 = k) = 1/N; \; k = 1, \ldots, N.$$

Положим

$$U = \min(\xi_1, \xi_2), \; V = \max(\xi_1, \xi_2), \; D = V - U.$$

Найти распределения сл.в. $U$, $V$, $D$.

45. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}$ независимы и каждая принимает значения 1 и 0 с вероятностью $p$ и $q=1-p$ соответственно. Положим

$$\eta_l = \xi_l + \xi_{l+1} \pmod 2, \quad \gamma = \sum_1^n \eta_l.$$

Найти $E\gamma$ и $\operatorname{var}\gamma$.

46. Пусть $\xi_1$ и $\xi_2$ — независимые сл. в., принимающие неотрицательные целые значения, и $\xi_1+\xi_2$ имеет биномиальное распределение. Показать, что каждая из величин $\xi_1$ и $\xi_2$ имеет биномиальное распределение. Верно ли это утверждение, если биномиальное распределение заменить на

а) отрицательно-биномиальное распределение,

б) пуассоновское распределение?

47. Независимые сл. в. $\xi$, $\eta$, $\zeta$ принимают целые значения $1, 2, \ldots, n$ с вероятностями $1/n$. Найти

$$P(\xi+\eta=\zeta),\ P(\xi+\eta=2\zeta),\ P(\xi+\eta+\zeta=n+1).$$

48. Пусть $\nu$ — сл. в., распределенная по геометрическому закону. Найти производящие функции сл. в.

$$\nu_+ = \max(N, \nu),\ \nu_- = \min(N, \nu),$$

здесь $N$ — целое неотрицательное число.

49. Пусть $\nu$, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые сл. в., принимающие целые неотрицательные значения, при этом сл. в. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ одинаково распределены и производящая функция каждой из них есть $p(z)$, $|z| \leqslant 1$, а сл. в. $\nu$ имеет биномиальное распределение $\mathrm{Bi}(n, p)$. Положим

$$S_0 = 0,\ S_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k;\ k = 1, \ldots, n.$$

Найти производящую функцию сл. в. $S_\nu$.

50. Пусть сл. в. $\xi$ и $\eta$ принимают целые неотрицательные значения и

$$P(\xi = n,\ \eta = k) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \text{ при } 0 \leqslant k \leqslant n,$$

$$= 0 \text{ при } k > n,$$

где $\lambda > 0$, $0 \leqslant p \leqslant 1$. Найти совместную производящую функцию сл. в. $\xi$ и $\eta$, т. е.

$$p(z_1, z_2) = E z_1^{\xi} z_2^{\eta},\ |z_1| < 1,\ |z_2| < 1,$$

и $\operatorname{cor}(\xi, \eta)$.

**51.** Показать, что производящая функция числа инверсий $\xi$ в случайной перестановке $n$ чисел (все $n!$ перестановок равновероятны) равна

$$p(z) = \sum_{l=0}^{C_n^2} P(\xi = l)\, z^l = \prod_{k=1}^{n} \frac{1-z^k}{1-z} \cdot \frac{1}{n!}.$$

Найти $E\xi$ и $\operatorname{var}\xi$.

**52*.** Пусть сл. в. $\xi$ имеет отрицательно-биномиальное распределение $\mathrm{Bi}^-(n, p)$,

$$\alpha_k = P(\xi = k), \quad \beta_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}; \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\lambda = nq/p, \ \delta = nq^2/p^2, \ q \leqslant 1/7.$$

Тогда

$$|\alpha_k - \beta_k| \leqslant 2\delta \ \forall k. \qquad (*)$$

Более того, если $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые сл. в., сл. в. $\xi_s$ имеет геометрическое распределение

$$P(\xi_s = k) = p_s q_s^k, \quad q_s = 1 - p_s,$$

$$\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_n,$$

$$\lambda = E\xi = \sum_1^n E\xi_s = \sum_1^n \frac{q_s}{p_s}, \quad \delta = \sum_1^n \frac{q_s^2}{p_s^2},$$

$$q_s \leqslant \frac{1}{7} \ \forall s,$$

то выполнено $(*)$.

**53.** Пусть $A$ и $B$ — события, $1_A$ и $1_B$ — их индикаторы.

Показать, что

1) $\operatorname{var} 1_A = P(A) \cdot P(A^c)$,

2) $\operatorname{cov}(1_A, 1_B) = P(AB) - P(A) \cdot P(B)$,

3) если $0 < P(A) < 1$, $0 < P(B) < 1$, то независимость событий $A$ и $B$ равносильна $\operatorname{cor}(1_A, 1_B) = 0$.

**54.** Применяя к крайним частям равенств

$$1 - 1_{\bigcup_1^n A_k} = 1_{\left(\bigcup_1^n A_k\right)^c} = 1_{\bigcap_1^n A_k^c} = \prod_1^n 1_{A_k^c} =$$

$$= (1 - 1_{A_1}) \ldots (1 - 1_{A_n})$$

операцию математического ожидания, получить фор-

мулу для вероятности объединения событий через вероятности их пересечений.

**55.** Пусть $\xi$ — сл. в. и $0<\operatorname{var}\xi<\infty$. Показать, что

$$P\left\{-3{,}2<\frac{\xi-E\xi}{\sqrt{\operatorname{var}\xi}}<3{,}2\right\}>0{,}9.$$

**56.** Пусть $\xi$ — сл. в. и

$$a=E\xi,\ 0<b=[E(\xi-a)^{10}]^{1/10}<+\infty.$$

Показать, что

$$P\left\{-2<\frac{\xi-a}{b}<2\right\}>0{,}999.$$

**57.** Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных сл. в. $\xi_1, \xi_2, \ldots$. Через $J(n)$ обозначим сл. число скачков соседних элементов последовательности $\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}$, т. е. $J(n)=\sum_1^n 1_{(\xi_k\neq\xi_{k+1})}$. Показать, что

$$E\left|\frac{J(n)}{n}-p\right|^2\to 0 \text{ при } n\to\infty,$$

где $p=P(\xi_1\neq\xi_2)$.

**58.** Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — сл. в. (возможно, зависимые) и $\varepsilon>0$. Показать, что

$$P\left\{\left|\sum_1^n \xi_i\right|\geqslant\varepsilon\right\}\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\sum_1^n E|\xi_i|.$$

**59.** Пусть $\xi$ — сл. в., $f$ и $g$ — числовые функции на $R^1$, $A\subset R^1$. Предположим, что

1) $f(x)\leqslant 0$, если $x\in\overline{A}$; $f(x)\leqslant 1$, если $x\in A$;

2) $g(x)\geqslant 0$, если $x\in\overline{A}$; $g(x)\geqslant 1$, если $x\in A$;

3) $f(\xi)$ и $g(\xi)$ — суммируемые случайные величины;

4) $\{\xi\in A\}$ есть событие.

Показать, что

$$Ef(\xi)\leqslant P(\xi\in A)\leqslant Eg(\xi).$$

Указание:

$$f(\xi)\leqslant 1_{(\xi\in A)}\leqslant g(\xi).$$

**60.** Рассмотрим для каждого $n$ независимые сл. в. $\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}$, принимающие значения 1 и 0 с вероятностями $p$ и $q=1-p$ соответственно. Положим

$$\eta_i = \xi_i + \xi_{i+1} \pmod 2, \quad S_n = \sum_1^n \eta_i.$$

Показать, что $\forall \varepsilon > 0$

$$p_n = P\{|S_n/n - E\eta_1| \geqslant \varepsilon\} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

**РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 31—60**

31. а) Если $P(\xi = 0) = 1$, то $E\xi^2 = 0 \cdot P(\xi^2 = 0) = 0$
Обратно, пусть $E\xi^2 = 0$, $A_n = \{|\xi| \geqslant 1/n\}$; $n = 1, 2, \ldots$
В силу неравенства Маркова

$$P(A_n) \leqslant \frac{E\xi^2}{(1/n)^2} = 0.$$

Имеем $A_n \uparrow A = \{|\xi| > 0\} = \{\xi \neq 0\}$.
Следовательно,

$$P(\xi \neq 0) = \lim_{n \to \infty} P(A_n) = 0.$$

б) Если $P(\xi = c) = 1$, то $P(\xi - c = 0) = 1$
и в силу а), с учетом $E\xi = c \cdot P(\xi = c) = c$,

$$\operatorname{var} \xi = E(\xi - c)^2 = 0.$$

Обратно, если $\operatorname{var} \xi = 0$, то $E(\xi - c)^2 = 0$ при $c = E\xi$ и в силу а)

$$P(\xi - c = 0) = 1.$$

32. $E(\xi - c)^2 = E[(\xi - c_0) - (c - c_0)]^2 = E(\xi - c_0)^2 - 2(E\xi - c_0)(c - c_0) + (c - c_0)^2 = \operatorname{var} \xi + (c - c_0)^2 \geqslant \operatorname{var} \xi$.

33. В силу предыдущей задачи

$$E(\eta - a\xi - b)^2 \geqslant \operatorname{var}(\eta - a\xi) = \operatorname{var} \eta - 2a \operatorname{cov}(\xi, \eta) + a^2 \operatorname{var} \xi.$$

При $\operatorname{var} \xi = 0$ получим в силу задачи 31 $\xi - E\xi = 0$ п. н., откуда $(\xi - E\xi)(\eta - E\eta) = 0$ п. н., и, следовательно, $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = E(\xi - E\xi)(\eta - E\xi) = 0$, тем самым, $E(\eta - a\xi - b)^2 \geqslant \operatorname{var} \eta = E(\eta - a_0\xi - b_0)^2$ при $a_0 = 0$, $b_0 = E\eta - a_0 E\xi$. При $\operatorname{var} \xi > 0$ квадратный трехчлен

$$f(a) = \operatorname{var} \eta - 2a \operatorname{cov}(\xi, \eta) + a^2 \operatorname{var} \xi$$

принимает наименьшее значение при $a = a_0 = \operatorname{cov}(\xi, \eta)/\operatorname{var} \xi$, равное

$$f(a_0) = \operatorname{var}\eta - 2\frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)^2}{\operatorname{var}\xi} + \left[\frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\operatorname{var}\xi}\right]^2 \operatorname{var}\xi =$$

$$= \operatorname{var}\eta - \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)^2}{\operatorname{var}\xi} = (1-\rho^2)\operatorname{var}\eta.$$

Заметим еще, что

$$f(a_0) = \operatorname{var}(\eta - a_0\xi) = E(\eta - a_0\xi - b_0)^2.$$

**34.** В задаче 33 получено, что

$$\min_{a,\,b} E(\eta - a\xi - b)^2 = (1-\rho^2)\operatorname{var}\eta.$$

Если $\eta - a\xi - b = 0$ п. н., то $(1-\rho^2)\operatorname{var}\eta = 0$, т. е. $\rho = \pm 1$.

Обратно, $\rho = \pm 1$ влечет $\eta - a_0\xi - b_0 = 0$ п. н.

**35.** а) $\operatorname{cov}(\xi_1+\xi_2,\ \xi_1-\xi_2) = \operatorname{cov}(\xi_1,\ \xi_1) - \operatorname{cov}(\xi_1,\ \xi_2) + \operatorname{cov}(\xi_2,\ \xi_1) - \operatorname{cov}(\xi_2,\ \xi_2) = \operatorname{var}\xi_1 - \operatorname{var}\xi_2 = 0$.

б) $\xi = \sin\alpha$, $\eta = \cos\alpha$, где $P(\alpha = -\pi/2) = P(\alpha = 0) = P(\alpha = \pi/2) = 1/3$.

Здесь $E\xi = (-1+0+1)\frac{1}{3} = 0$, $E\xi\eta = E\sin\alpha\cos\alpha =$

$$= \frac{1}{2}E\sin 2\alpha = 0,\ \operatorname{cov}(\xi,\ \eta) = 0.$$

Величины $\xi$ и $\eta$ зависимы; например,

$$P(\xi = 0,\ \eta = 0) = 0 \neq \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = P(\xi = 0)\cdot P(\eta = 0).$$

**36.** Так как $p(z) = Ez^{\xi} = (pz+q)^n = 2^{-n}(1+z)^n$,

$$E\eta = \operatorname{Im} Ee^{\frac{\pi\xi}{2}i},\ Ee^{\frac{i\pi\xi}{2}} = E\left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^{\xi} = Ei^{\xi} = 2^{-n}\times$$

$$\times (1+i)^n = 2^{-\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 2^{-\frac{n}{2}}e^{\frac{i\pi}{4}n} =$$

$$= 2^{-\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{\pi n}{4} + i\sin\frac{\pi n}{4}\right),\ \text{то}\ E\eta = 2^{-n/2}\sin\frac{\pi n}{4}.$$

**37.** $P(\xi - k = n \mid \xi \geqslant k) = P(\xi = k+n)/P(\xi \geqslant k)$. Пусть выполнено 1°. Тогда

$$P(\xi - k = n/\xi \geqslant k) = pq^{k+n}/q^k = pq^n = P(\xi = n).$$

Пусть выполнено 2°. Имеем

$$P(\xi=n+1)=P(\xi\geqslant 1)\cdot P(\xi=n)=qP(\xi=n),\ q=$$
$$=P(\xi\geqslant 1),$$
$$P(\xi=n)=qP(\xi=n-1)=\ldots=q^nP(\xi=0)=q^np,$$
$$p=P(\xi=0)=1-q.$$

38. $$P(\xi_1=k\mid\xi_1+\xi_2=n)=\frac{P(\xi_1=k,\ \xi_2=n-k)}{P(\xi_1+\xi_2=n)}=$$
$$=\frac{pq^k\cdot pq^{n-k}}{\sum\limits_{l=0}^{n}pq^l\cdot pq^{n-l}}=\frac{1}{n+1}.$$

Обратное утверждение неверно. Действительно, пусть

$$\Omega=\{\omega_{kn}:0\leqslant k\leqslant n\},\quad p_n>0,\ \sum_{n\geqslant 0}p_n=1,$$
$$P(\omega_{kn})=p_n/(n+1),$$

т. е. если $\Omega_n=\{\omega_{kn}:k=0,\ 1,\ldots,n\}$, то $\Omega=\sum\limits_{n\geqslant 0}\Omega_n$, $P(\Omega_n)=p_n$, а внутри $\Omega_n$ элементарные события равновероятны.
Положим

$$\xi_1(\omega_{kn})=k,\ \xi_2(\omega_{kn})=n-k.$$

Тогда при $0\leqslant k\leqslant n$

$$P(\xi_1=k\mid\xi_1+\xi_2=n)=\frac{P(\xi_1=k,\ \xi_1+\xi_2=n)}{P(\xi_1+\xi_2=n)}=$$
$$=\frac{P(\omega_{kn})}{P(\Omega_n)}=\frac{p_n/(n+1)}{p_n}=\frac{1}{n+1};$$
$$P(\xi_1=k)=P(\{\omega_{kn}:n=k,\ k+1,\ldots\})=$$
$$=\sum_{n\geqslant k}\frac{p_n}{n+1}.$$

Заметим, что если заранее предположить независимость и одинаковую распределенность сл. в $\xi_1$ и $\xi_2$, то обратное утверждение уже становится верным. Действительно, пусть еще

$$P(\xi_1=k\mid\xi_1+\xi_2=n)=\frac{1}{n+1},\quad 0\leqslant k\leqslant n.$$

Положим $P(\xi_1=k)=p_k$. Тогда

$$\frac{p_k p_{n-k}}{\sum_{l=0}^{n} p_l p_{n-l}}=\frac{1}{n+1}, \quad 0\leqslant k\leqslant n<\infty,$$

откуда следует, что $p_k p_{n-k}$ не зависит от $k$ при $0\leqslant k\leqslant n$. Положим $\alpha_n=p_k p_{n-k}$, $k\leqslant n$, $p_0=p$, $q=1-p$. Покажем, что $p_k=pq^k$, используя индукцию по $k$. При $k=0$ имеем по определению $p_0=p$. Если $p_m=pq^m$ при $m<k$, то

$$p_k=\sum_{n\geqslant k} p_k p_{n-k}=\sum_{n\geqslant k}\alpha_n=\sum_{n\geqslant 0}\alpha_n-\alpha_0-\ldots-\alpha_{k-1},$$

откуда, используя $p_0=\sum_{n\geqslant 0}\alpha_n$, $\alpha_n=p_0 p_n$, имеем

$$p_k=p[1-\alpha_0-\cdots-\alpha_{k-1}]=p[1-p-pq-\cdots \cdots-pq^{k-1}]=pq^k.$$

**39.** Так как сл. в. $\xi_1+\xi_2$ имеет пуассоновское распределение с параметром $\lambda_1+\lambda_2$, то

$$P(\xi_1=k\,|\,\xi_1+\xi_2=n)=\frac{P(\xi_1=k)\cdot P(\xi_2=n-k)}{P(\xi_1+\xi_2=n)}=$$

$$=\frac{\lambda_1^k e^{-\lambda_1}\lambda_2^{n-k}e^{-\lambda_2} n!}{k!\,(n-k)!\,(\lambda_1+\lambda_2)^n e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}=$$

$$=C_n^k\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}.$$

**40.** а) $$E\frac{1}{1+\xi}=\sum_{k>0}\frac{1}{1+k}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=$$

$$=\frac{1}{\lambda}\sum_{k\geqslant 1}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

б) $$\int_0^1 z^{\alpha-1}p(z)\,dz=\int_0^1 z^{\alpha-1}\sum_{k>0}p_k z^k dz=$$

$$=\sum_{k\geqslant 0}p_k\int_0^1 z^{\alpha+k-1}dz=\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{\alpha+k}p_k=E\frac{1}{\alpha+\xi}.$$

**41.** $P(\xi\geqslant k)=P(\xi_1\geqslant k,\ \xi_2\geqslant k)=P(\xi_1\geqslant k)\cdot P(\xi_2\geqslant k)=q_1^k q_2^k=q^k$, где $q=q_1q_2$, $P(\xi=k)=P(\xi\geqslant k)-P(\xi\geqslant k+1)=q^k-q^{k+1}=pq^k$, $p=1-q$.

**42.** Время ожидания $\xi$ до первого освобождения телефона-автомата равно $\min(\xi_1, \ldots, \xi_N)$, где $\xi_i$ — длительность разговора в $i$-м автомате. Считая длительности разговоров в различных автоматах независимыми, используя результат предыдущей задачи и выражение среднего $\mu$ геометрического распределения через его параметр $q$,

$$\mu = q/(1-q), \quad q = \mu/(\mu+1),$$

получим, что

$\xi = \min(\ldots \min(\min(\xi_1, \xi_2), \xi_3) \ldots, \xi_N)$ имеет геометрическое распределение с параметром $q^N$,

$$E\xi = q^N/(1-q^N) = 1/(q^{-N}-1) = 1/((1+1/\mu)^N - 1).$$

**43.** Положим $P(\xi = n) = p_n$ и воспользуемся равенством

$$P(\xi_1 = m, \xi_2 = n) = P(\xi = m+n) \times$$
$$\times C^m_{m+n} p^m q^n, \quad q = 1-p.$$

Пусть $\xi$ имеет пуассоновское распределение $\mathrm{Po}(\lambda)$.

$$P(\xi_1 = m, \xi_2 = n) = \frac{\lambda^{m+n}}{(m+n)!} e^{-\lambda} \cdot \frac{(m+n)!}{m!n!} p^m q^n =$$
$$= \frac{(\lambda p)^m}{m!} e^{-\lambda p} \cdot \frac{(\lambda q)^n}{n!} e^{-\lambda q} = P(\xi_1 = m, \xi_2 < \infty) \times$$
$$\times P(\xi_1 < \infty, \xi_2 = n) = P(\xi_1 = m) \cdot P(\xi_2 = n).$$

Обратно, пусть $\xi_1$ и $\xi_2$ независимы и $0 < p < 1$. Имеем

$$P(\xi_1 = m) \cdot P(\xi_2 = n) = P(\xi_1 = m, \xi_2 = n) =$$
$$= P(\xi = m+n) \cdot C^m_{m+n} p^m q^n,$$

или

$$\gamma_{m+n} = P(\xi = m+n) \cdot (m+n)! =$$
$$= \frac{P(\xi_1 = m) \cdot m!}{p^m} \cdot \frac{P(\xi_2 = n) \cdot n!}{q^n} = \alpha_m \beta_n$$

для $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$. Так как $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$ (иначе $\gamma_n = \alpha_0 \beta_n = \alpha_n \beta_0 = 0 \ \forall n \geqslant 0$, т. е. $p_n = 0 \ \forall n$, но $\Sigma p_n = 1$), то, полагая

$$c_n = \gamma_n/\gamma_0, \ a_n = \alpha_n/\alpha_0, \ b_n = \beta_n/\beta_0,$$

получим

$$c_{m+n} = a_m b_n, \ c_0 = a_0 = b_0 = 1,$$

откуда $c_m = a_m = b_m$. Это дает $c_{m+n} = c_m c_n$ и, значит, $c_n = \lambda^n$, $\lambda = c_1$. Таким образом, $\gamma_n = \gamma_0 \lambda^n$, или $P(\xi = n) = \gamma_0 \dfrac{\lambda^n}{n!}$, или $P(\xi = n) = \dfrac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$.

44. $P(U \geqslant k) = P(\xi_1 \geqslant k, \ \xi_2 \geqslant k) = P(\xi_1 \geqslant k) \times$
$\times P(\xi_2 \geqslant k) = \dfrac{(N-k+1)^2}{N^2}, \quad k = \overline{1, N+1};$

$P(U = k) = P(U \geqslant k) - P(U \geqslant k+1) =$
$= \dfrac{2(N-k)+1}{N^2}, \quad k = \overline{1, N}.$

Для $V$ аналогично (с помощью равенства $P(V \leqslant k) = P(\xi_1 \leqslant k) \cdot P(\xi_2 \leqslant k)$) или заменой $k \leftrightarrow N-k+1$ (тогда $\max \leftrightarrow \min$) получим

$$P(V = k) = P(U = N-k+1) = \frac{2k-1}{N^2}, \quad k = \overline{1, N}.$$

$$P(D = 0) = P(\xi_1 = \xi_2) = \sum_{k=1}^{N} P(\xi_1 = k) \times$$
$$\times P(\xi_2 = k) = N \cdot \frac{1}{N^2} = \frac{1}{N};$$

при $k = \overline{1, N-1}$

$$P(D = k) = P(\xi_1 - \xi_2 = k) + P(\xi_2 - \xi_1 = k) =$$
$$= 2 \sum_{i=1}^{N-k} P(\xi_1 = i, \ \xi_2 = i+k) = 2 \frac{N-k}{N^2}.$$

45. $E\gamma = \sum_{l=1}^{n} E\eta_l$, $\eta_l = 1_{(\xi_l \neq \xi_{l+1})}$, $E\eta_l = P(\xi_l \neq \xi_{l+1}) =$
$= P(\xi_1 = 0, \ \xi_2 = 1) + P(\xi_1 = 1, \ \xi_2 = 0) = 2pq,$
$E\gamma = 2npq.$

$$\operatorname{var} \gamma = \sum_{1}^{n} \operatorname{var} \eta_i + \sum_{i \neq j}^{} \operatorname{cov}(\eta_i, \eta_j) = \sum_{1}^{n} \operatorname{var} \eta_l +$$
$$+ 2 \sum_{1}^{n-1} \operatorname{cov}(\eta_l, \eta_{l+1}),$$

где использовано, что при $|i-j| > 1$ случайные величины $\eta_i$ и $\eta_j$ независимы (как функции независи-

мых случайных векторов $(\xi_i, \xi_{i+1})$ и $(\xi_j, \xi_{j+1})$) и, следовательно, некоррелированы.

$$E\eta_1^2 = E\eta_1 = 2pq, \ \operatorname{var}\eta_1 = E\eta_1^2 - (E\eta_1)^2 = 2pq(1-2pq);$$

$$\operatorname{cov}(\eta_1, \eta_2) = E\eta_1\eta_2 - E\eta_1 \cdot E\eta_2, \quad E\eta_1\eta_2 = P(\xi_1 \neq \xi_2, \ \xi_2 \neq \xi_3) = P(\xi_1 = 0, \xi_2 = 1, \xi_3 = 0) + P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 0, \xi_3 = 1) = pq^2 + p^2q = pq, \ \operatorname{cov}(\eta_1, \eta_2) = pq - 4p^2q^2 = pq(1-4pq);$$

$$\operatorname{var}\gamma = n\operatorname{var}\eta_1 + 2(n-1)\operatorname{cov}(\eta_1, \eta_2) = 2npq(1-2pq) + 2(n-1)pq(1-4pq) = 4npq(1-3pq) - 2pq(1-4pq).$$

**46.** Пусть $\xi_1 + \xi_2 \sim \mathrm{Bi}(n, p)$, $p(z) = (pz+q)^n$ — производящая функция биномиального распределения. Случайные величины $\xi_1$ и $\xi_2$ принимают значения $0, 1, \ldots, n$. Обозначим $p_i(z)$ их производящие функции. Тогда $p_i(z)$ — полиномы степеней, не превосходящих $n$, и

$$p_1(z)p_2(z) = (pz+q)^n.$$

Следовательно,

$$p_i(z) = c_i(pz+q)^{n_i}, \ n_1 + n_2 = n.$$

Условия $p_i(1) = 1$ влекут $c_i = 1$. Следовательно, $\xi_i \sim \mathrm{Bi}(n_i, p)$. Утверждения а) и б) верные. Проверим а). Пусть $\xi_1 + \xi_2 \sim \mathrm{Bi}^-(n, p)$. Тогда $p(z) = p^n(1-qz)^{-n} = p_1(z) \cdot p_2(z)$. Следовательно, функции $p_i(z)$ не обращаются в нуль в круге $|z| < 1$, $1/p_i(z)$ — аналитические функции в круге $|z| < 1$, произведение которых есть полином $p^{-n}(1-qz)^n$ степени $n$, откуда

$$1/p_i(z) = c_i(1-qz)^{n_i}, \ n_1 + n_2 = n,$$

а условия $p_i(1) = 1$ влекут $c_i = p^{-n_i}$.

**47. Решение 1.** $P(\xi + \eta = \zeta) = \sum_{i,j} P(\xi = i, \ \eta = j,$

$$\zeta = (i+j) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j<n}}^{n} 1/n^3.$$

Обозначим $a_k = |\{(i, j): i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}, i + j = k\}|$, $k = \overline{2, 2n}$. Имеем

$$a_k = k - 1, \quad k = \overline{2, n+1}; \quad a_k = 2n - (k-1), \quad k = \overline{n+1, 2n}.$$

$$\sum_{i+j<n} 1 = \sum_{k=2}^{n} a_k = \sum_{2}^{n} (k-1) = n(n-1)/2,$$

$$P(\xi + \eta = \zeta) = \frac{n-1}{2n^2}.$$

$$P(\xi+\eta+\zeta=n+1) = P(\xi+\eta=n+1-\zeta) =$$
$$= P(\xi+\eta=\bar{\xi}) = P(\xi+\eta=\zeta),$$

так как случайные векторы $(\xi, \eta, \zeta)$ и $(\xi, \eta, \bar{\zeta})$ одинаково распределены, $\bar{\zeta} = n+1-\zeta$.

$$P(\xi + \eta = 2\zeta) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j \text{ четное}}}^{n} P(\xi = i, \eta = j, \zeta = (i+j)/2) =$$

$$= \frac{1}{n^3} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j \text{ четное}}}^{n} 1 = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} a_{2k}.$$

Положим $m = [(n+1)/2] = \frac{n}{2} + \frac{1-(-1)^n}{4}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} a_{2k} = \sum_{k=1}^{m} (2k-1) + \sum_{k=m+1}^{n} [2n-(2k-1)] =$$

$$= \frac{1+(2m-1)}{2} m + \frac{[2n-(2(m+1)-1)] + [2n-(2n-1)]}{2} \times$$

$$\times (n-m) = (n-m)^2 + m^2 = \frac{n^2}{2} + \frac{1-(-1)^n}{4}.$$

**Решение 2.** Полагая $\bar{\zeta} = n+1-\zeta$ и учитывая, что сл. векторы $(\xi, \eta, \zeta)$ и $(\xi, \eta, \bar{\zeta})$ одинаково распределены, получаем

$$P(\xi+\eta=\zeta) = P(\xi+\eta=\bar{\zeta}) = P(\xi+\eta+\zeta=n+1).$$

Вероятность же $P_1 = P(\xi+\eta+\zeta=n+1)$ равна коэффициенту при $z^{n+1}$ степенного ряда

$$p_1(z) = Ez^{\xi+\eta+\zeta} = Ez^{\xi} \cdot Ez^{\eta} \cdot Ez^{\zeta} = (Ez^{\xi})^3 =$$

$$= \left(\frac{z}{n} + \frac{z^2}{n} + \ldots + \frac{z^n}{n}\right)^3 = \frac{z^3}{n^3}\left(\frac{1-z^n}{1-z}\right)^3 =$$

$$= \frac{1}{n^3} z^3 (1 - 3z^n + 3z^{2n} - z^{3n})(1-z)^{-3}.$$

Пусть $p(z)|_k$ — коэффициент при $z^k$ функции $p(z)$, представленной степенным рядом. Тогда

$$P_1 = p_1(z)\Big|_{n+1} = \frac{1}{n^3} z^3 \frac{1}{(1-z)^3}\Big|_{n+1} = \frac{1}{n^3} \frac{1}{(1-z)^3}\Big|_{n-2}.$$

Дифференцируя два раза тождество

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{m>0} z^m, \quad |z| < 1,$$

получим

$$\frac{2!}{(1-z)^3} = \sum_{m \geqslant 2} m(m-1) z^{m-2}, \text{ или } \frac{1}{(1-z)^3} =$$

$$= \sum_{m \geqslant 2} C_m^2 z^{m-2},$$

откуда

$$P_1 = C^2_n / n^3.$$

Найдем $P_2 = P(\xi+\eta=2\zeta)$. Так как $P_2 = P(\xi+\eta=2\xi) = P(\xi+\eta+2\zeta=2(n+1))$, то

$$P_2 = Ez^{\xi+\eta+2\zeta}\Big|_{2(n+1)} = \left[\frac{1}{n}\sum_1^n z^k\right]^2 \times$$

$$\times \left[\frac{1}{n}\sum_1^n z^{2k}\right]\Big|_{2(n+1)} = \frac{z^4}{n^3}\left[\frac{1-z^n}{1-z}\right]^2 \frac{1-z^{2n}}{1-z^2}\Big|_{2(n+1)} =$$

$$= \frac{z^4(1-2z^n)}{n^3(1-z)^2(1-z^2)}\Big|_{2(n+1)} = \frac{1}{n^3}\left\{\frac{1}{(1-z)^3(1+z)} \times\right.$$

$$\left. \times\Big|_{2n-2} - \frac{2}{(1-z)^3(1+z)}\Big|_{n-2}\right\}.$$

Представление

$$\frac{1}{(1-z)^3(1+z)} = \frac{Az^2+Bz+C}{(1-z)^3} + \frac{D}{1+z}$$

дает

$$A=1/8,\ B=-4/8,\ C=7/8,\ D=1/8.$$

Так как

$$\frac{1}{(1-z)^3}-\sum_{m\geqslant 2}C_m^2 z^{m-2}=\sum_{m\geqslant 0}C_{m+2}^2 z^m,$$

то

$$\frac{1}{(1-z)^3(1+z)}\Big|_{2n-2}=\frac{A}{(1-z)^3}\Big|_{2n-4}+\frac{B}{(1-z)^3}\Big|_{2n-3}+$$
$$+\frac{C}{(1-z)^3}\Big|_{2n-2}+\frac{D}{1+z}\Big|_{2n-2}=AC_{2n-2}^2+BC_{2n-1}^2+$$
$$+CC_{2n}^2+D=\frac{1}{8}\left[(n-1)(2n-3)-4(2n-1)\times\right.$$
$$\left.\times(n-1)+7n(2n-1)+1\right]=n^2;$$
$$\frac{1}{(1-z)^3(1+z)}\Big|_{n-2}=\frac{A}{(1-z)^3}\Big|_{n-1}+\frac{B}{(1-z)^3}\Big|_{n-3}+$$
$$+\frac{C}{(1-z)^3}\Big|_{n-2}+\frac{D}{1+z}\Big|_{n-2}=AC_{n-2}^2+BC_{n-1}^2+$$
$$+CC_n^2+D(-1)^n=\frac{1}{16}\left[(n-2)(n-3)-4(n-1)\times\right.$$
$$\left.\times(n-2)+7n(n-1)\right]+\frac{1}{8}(-1)^n=$$
$$=\frac{n^2}{4}-\frac{1}{8}\left[1-(-1)^n\right].$$

Окончательно,

$$P_2=\frac{1}{n^3}\left[n^2-\frac{n^2}{2}+\frac{1}{4}\left(1-(-1)^n\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{2n}+\frac{1-(-1)^n}{4n^3}.$$

48. $$Fz^{N}=\sum_{k\geqslant 0}z^{\max(N,k)}pq^k=\sum_{k=0}^{N-1}z^N pq^k+$$
$$+\sum_{k\geqslant N}z^k pq^k=z^N\left[1-q^N+pq^N\frac{1}{1-qz}\right]=z^N\times$$
$$\times\left[1-q^{N+1}\frac{1-z}{1-qz}\right].$$

$$Ez^{\nu-}=\sum_{k\geqslant 0} z^{\min(N,k)}pq^k=\sum_{k=0}^{N-1} z^k pq^k+\sum_{k\geqslant N} z^N pq^k=$$

$$=p\,\frac{1-q^N z^N}{1-qz}+q^N z^N.$$

**49.** $Ez^{S_\nu}=\sum_{k\geqslant 0} z^k P(S_\nu=k)=\sum_{k\geqslant 0} z^k \sum_{m\geqslant 0}\times$

$$\times P(S_\nu=k\,|\,\nu=m)P(\nu=m)=$$

$$=\sum_{m\geqslant 0}\Big[\sum_{k\geqslant 0} z^k P(S_m=k)\Big]P(\nu=m)=$$

$$=\sum_{m\geqslant 0} p(z)^m P(\nu=m)=[p(z)p+q]^n.$$

**50.** $p(z_1,z_2)=Ez_1^{\xi}z_2^{\eta}=\sum_{k<n} z_1^n z_2^k\,\frac{\lambda^n}{n!}\,e^{-\lambda}C_n^k p^k q^{n-k}=$

$$=\sum_{n\geqslant 0}\left[\sum_{k=0}^{n} C_n^k (pz_2)^k q^{n-k}\right]\frac{(\lambda z_1)^n}{n!}\,e^{-\lambda}=$$

$$=\exp\{\lambda[z_1(pz_2+q)-1]\}.$$

$$E\xi=\frac{\partial}{\partial z_1}p(z_1,\,z_2)\Big|_{z_1=z_2=1}=\lambda,$$

$$E\eta=\frac{\partial}{\partial z_2}p(z_1,\,z_2)\Big|_{z_1=z_2=1}=\lambda p,$$

$$E\xi(\xi-1)=\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}p(z_1,\,z_2)\Big|_{z_1=z_2=1}=\lambda^2,$$

$$E\eta(\eta-1)=\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}p(z_1,\,z_2)\Big|_{z_1=z_2=1}=\lambda^2p^2,$$

$$E\xi\eta=\frac{\partial^2}{\partial z_1\partial z_2}p(z_1,\,z_2)\Big|_{z_1=z_2=1}=\lambda p+\lambda^2 p;$$

$$\operatorname{var}\xi=(E\xi^2-E\xi)+E\xi-(E\xi)^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda,$$

$$\operatorname{var}\eta=\lambda p,$$

$$\operatorname{cov}(\xi,\,\eta)=E\xi\eta-E\xi\cdot E\eta=\lambda p,$$

$$\operatorname{cor}(\xi,\,\eta)=\operatorname{cov}(\xi,\,\eta)/\sqrt{\operatorname{var}\xi\cdot\operatorname{var}\eta}=\lambda p/\sqrt{\lambda\cdot\lambda p}=\sqrt{p}\,.$$

**51.** $\Omega=\{\omega=(e_1,\ldots,e_n)$: перестановки чисел $1,\ldots,n\}$, $|\Omega|=n!$, $P(\omega)=1/n!$. Обозначим $\sigma_i(\omega)$ номер числа $i$ в перестановке $\omega$, т. е.

$$\sigma_i(\omega)=k\leftrightarrow e_k=i.$$

Положим

$$\eta_{jk}^{(\omega)} = \begin{cases} 1, & \sigma_j(\omega) > \sigma_k(\omega) \text{ (номер } j \text{ больше номера } k), \\ 0, & \sigma_j(\omega) < \sigma_k(\omega) \text{ (номер } j \text{ меньше номера } k). \end{cases}$$

Имеем

$$\xi = \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} \eta_{jk} = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k; \quad \zeta_k = \sum_{j=1}^{k-1} \eta_{jk}, \; k \geqslant 2; \quad \zeta_1 = 0.$$

Положим

$$\zeta(\omega) = (\zeta_1(\omega), \ldots, \zeta_n(\omega)),$$

$$\overline{\Omega} = \{(\bar{\varepsilon}_1, \ldots, \bar{\varepsilon}_n) : \bar{\varepsilon}_l = \overline{0, \, l-1}, \; l = \overline{1, \, n}\} =$$

$$= \{0\} \times \{0, 1\} \times \ldots \times \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Заметим, что отображение $\omega \to \bar{\omega} = \zeta(\omega)$ осуществляет взаимно-однозначное соответствие между множествами $\Omega$ и $\overline{\Omega}$. Следовательно,

$$P(\zeta(\omega) = \bar{\omega}) = P(\omega = \zeta^{-1}(\bar{\omega})) = 1/n!,$$

откуда следует независимость случайных величин $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, причем $\zeta_k$ равномерно распределена на множестве $\{0, 1, \ldots, k-1\}$,

$k = \overline{1, \, n}$. Теперь

$$p(z) = Ez^{\xi} = \prod_{k=1}^{n} p_{\zeta_k}(z) = \prod_{k=1}^{n} \left( \frac{1}{k} \cdot \frac{1 - z^k}{1 - z} \right) =$$

$$= \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n} \frac{1 - z^k}{1 - z}.$$

$$E\xi = \sum_{k=1}^{n} E\zeta_k, \quad \operatorname{var} \xi = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{var} \zeta_k;$$

$$E\zeta_k = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{l}{k} = \frac{k-1}{2}, \quad E\zeta_k^2 = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{l^2}{k} = \frac{(k-1)(2k-1)}{6},$$

$$\operatorname{var} \zeta_k = \frac{k^2 - 1}{12}; \quad E\xi = \frac{n(n-1)}{4},$$

$$\operatorname{var} \xi = \frac{n(n-1)(2n+5)}{72}.$$

**52.** Производящая функция случайной величины $\xi_s$ есть

$$p_{\xi_s}(z) = p_s/(1 - q_s z) = 1/[1 - \lambda_s(z - 1)],$$

где $0 < \lambda_s = q_s/p_s \leqslant 1/6$.

Производящая функция случайной величины $\xi$ есть

$$p_\xi(z) = \prod_{s=1}^{n} p_{\xi_s}(z).$$

Для производящей функции $p(z)$ распределения $\mathrm{Po}(\lambda)$ имеем при $|z| = 1$:

$$|p(z) - p_\xi(z)| = \left| \prod_{s=1}^{n} e^{\lambda_s (z-1)} - \prod_{s=1}^{n} [1 - \lambda_s (z-1)]^{-1} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{n} \left| e^{\lambda_s (z-1)} - [1 - \lambda_s (z-1)]^{-1} \right|,$$ так как $\left|e^{\lambda_s (z-1)}\right| =$

$= e^{\lambda_s (\mathrm{Re}\, z - 1)} \leqslant 1$, $|[1 - \lambda_s (z-1)]^{-1}| = |1 - \lambda_s (z-1)|^{-1} \leqslant 1$,

а для чисел $a_i$, $b_i$, для которых $|a_i| \leqslant 1$, $|b_i| \leqslant 1$, $i = \overline{1, n}$, справедливо неравенство

$$\left| \prod_1^n a_i - \prod_1^n b_i \right| \leqslant \sum_1^n |a_i - b_i|$$

(в самом деле,

$$\left| \prod_1^n a_i - \prod_1^n b_i \right| \leqslant \left| \left( \prod_1^{n-1} a_i \right) a_n - \left( \prod_1^{n-1} a_i \right) b_n \right| +$$

$$+ \left| \left( \prod_1^{n-1} a_i \right) b_n - \left( \prod_1^{n-1} b_i \right) b_n \right| \leqslant |a_n - b_n| +$$

$$+ \left| \prod_1^{n-1} a_i - \prod_1^{n-1} b_i \right| \leqslant \ldots \leqslant \sum_1^n |a_i - b_i| \Big).$$

Воспользуемся неравенством, справедливым при $|w| \leqslant 1/3$,

$$|e^w - 1/(1 - w)| \leqslant |w|^2$$

(в самом деле,

$$e^w - 1/(1 - w) = 1 + w + \frac{1}{2!} w^2 + \frac{1}{3!} w^3 + \ldots$$

$$\ldots - 1 - w - w^2 - w^3 - \ldots - \left(\frac{1}{2!} - 1\right) w^2 +$$

$$+ \left(\frac{1}{3!} - 1\right) w^3 + \ldots;$$

$$|e^w - 1/(1-w)| \leqslant |w|^2\left[\left(1-\frac{1}{2!}\right)+\left(1-\frac{1}{3!}\right)|w|+\ldots\right] \leqslant$$

$$\leqslant |w|^2\left[\frac{1}{2} + |w| + |w|^2 + \ldots\right] = |w|^2 \times$$

$$\times\left[\frac{1}{1-|w|} - \frac{1}{2}\right] \leqslant |w|^2\left[\frac{1}{1-1/3} - \frac{1}{2}\right] = |w|^2\Big).$$

Теперь

$$|p(z) - p_\xi(z)| \leqslant \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^2 |z-1|^2 = 2\delta(1-\cos\varphi), \text{ где}$$

$z = e^{i\varphi}$ (применение неравенства законно, так как при $w = \lambda_s(z-1)$ $|w| = \sqrt{2}\,\lambda_s\sqrt{1-\cos\varphi} < 2\lambda_s < 1/3$).
Теперь

$$|\alpha_k - \beta_k| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1} \frac{p_\xi(z) - p(z)}{z^{k+1}}\,dz\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |p_\xi(e^{i\varphi}) - p(e^{i\varphi})|\,d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\delta(1-\cos\varphi)\,d\varphi = 2\delta.$$

53. 1) $1_A^2 = 1_A$, $\operatorname{var} 1_A = E1_A^2 - (E1_A)^2 = P(A) -$
$- P(A)^2 = P(A)\,P(A^c)$.

2) $1_A 1_B = 1_{AB}$, $\operatorname{cov}(1_A, 1_B) = E1_A 1_B -$
$- E1_A \cdot E1_B = P(AB) - P(A)\,P(B)$.

3) $\operatorname{cor}(1_A, 1_B) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{cov}(1_A, 1_B) = 0 \Leftrightarrow P(AB) =$
$= P(A)\,P(B)$.

54. $E\left(1 - 1_{\bigcup_1^n A_k}\right) = 1 - P\left(\bigcup_1^n A_k\right)$,

$$(1-1_{A_1})\dots(1-1_{A_n}) = 1-\sum_i 1_{A_i}+\sum_{i<j}1_{A_i}1_{A_j}-$$

$$-\sum_{i<j<k}1_{A_i}1_{A_j}1_{A_k}+\dots+(-1)^n 1_{A_1}\dots 1_{A_n},$$

$$E(1-1_{A_1})\dots(1-1_{A_n}) = 1-S_1+S_2-S_3+\dots$$

$\dots+(-1)^n S_n$, где

$$S_k=\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} P(A_{i_1}\dots A_{i_k}).$$

$$P\left(\bigcup_1^n A_k\right)=S_1-S_2+S_3-\dots+(-1)^{n-1}S_n.$$

**55.** $P\left(-3{,}2<\dfrac{\xi-E\xi}{\sqrt{\operatorname{var}\xi}}<3{,}2\right)=1-P\left(|\xi-E\xi|\geqslant\right.$

$$\left.\geqslant 3{,}2\sqrt{\operatorname{var}\xi}\right)\geqslant 1-\frac{1}{(3{,}2)^2}>0{,}9$$

в силу неравенства Чебышева.

**56.** В силу неравенства Маркова

$$P\left(-2<\frac{\xi-a}{b}<2\right)=1-P(|\xi-a|\geqslant 2b)\geqslant 1-$$

$$-\frac{E|\xi-a|^{10}}{2^{10}\cdot b^{10}}=1-\frac{1}{2^{10}}>0{,}999.$$

**57.** $E\dfrac{J(n)}{n}=\sum_1^n P(\xi_k\neq\xi_{k+1})/n=p,$

$$E|J(n)/n-p|^2=[n\operatorname{var}1_{(\xi_1\neq\xi_2)}+2(n-1)\operatorname{cov}(1_{(\xi_1\neq\xi_2)}$$

$$1_{(\xi_2\neq\xi_3)})]\frac{1}{n^2}\to 0.$$

**58.** $P\left(\left|\sum_1^n\xi_i\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant E\left|\sum_1^n\xi_i\right|/\varepsilon\leqslant\sum_1^n E|\xi_i|/\varepsilon.$

**59.** Проверим, что $f(\xi)\leqslant 1_{(\xi\in A)}\leqslant g(\xi)$. Если $\xi(\omega)=x\in A$, то $f(x)\leqslant 1=1_{(\xi\in A)}\leqslant g(x)$. Если $\xi(\omega)=x\overline{\in}A$ то $f(x)\leqslant 0=1_{(\xi\in A)}\leqslant g(x)$. Теперь $Ef(\xi)\leqslant P(A)=E1_{(\xi\in A)}\leqslant Eg(\xi)$.

**60.** Результат задачи 45

$$\operatorname{var}S_n=4npq(1-3pq)-2pq(1-4pq)$$

вместе с неравенством Чебышева позволяют заключить, что

$$P_n=P(|S_n-ES_n|\geqslant\varepsilon n)\leqslant\frac{\operatorname{var}S_n}{\varepsilon^2n^2}\to 0,\ n\to\infty.$$

# Глава 2. ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОСТРАНСТВО

## § 1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

### 1.1. Общее вероятностное пространство.

В гл. 1 было введено понятие дискретного вероятностного пространства $(\Omega, S, P)$, где

$\Omega$ — конечное или счетное множество (пространство элементарных событий);

$S$ — класс всех подмножеств множества $\Omega$ (класс событий);

$P$ — числовая функция, определенная на $S$ (при этом $P(A)$ называется вероятностью события $A \in S$).

Эти объекты удовлетворяют следующим условиям.

A1. Класс $S$ является $\sigma$-алгеброй, т. е.

1) $A \in S$ влечет $A^c = \Omega \setminus A \in S$;

2) $A_i \in S$ для $i = 1, 2, \ldots$ влечет $\bigcup A_i \in S$, $\bigcap A_i \in S$.

A2. Числовая функция $P$, определенная на $S$,

1) неотрицательна, т. е. $P(A) \geqslant 0$ для всех $A \in S$;

2) нормирована, т. е. $P(\Omega) = 1$;

3) $\sigma$-аддитивна, т. е. $P(\Sigma A_i) = \Sigma P(A_i)$.

В общем случае (когда $\Omega$ — не обязательно конечное или счетное множество) нельзя таким же простым способом определить класс $S$ событий (как класс всех (!) подмножеств множества $\Omega$) и числовую функцию $P$ на этом классе, чтобы функция $P$ была неотрицательна, нормирована и $\sigma$-аддитивна. От класса $S$ подмножеств множества $\Omega$ потребуется, чтобы он был лишь $\sigma$-алгеброй.

Пусть теперь

$\Omega$ — произвольное множество элементов $\omega$;

$S$ — некоторый непустой класс подмножеств множества $\Omega$;

$P$ — числовая функция, определенная на $S$;

и пусть выполнены аксиомы A1 и A2.

Теория вероятностей дает следующую интерпретацию введенным объектам. Множество $\Omega$ называется пространством элементарных событий. Элементы класса $S$ называются событиями. Числовая функция $P$ называется вероятностной мерой, или просто вероятностью. Если $A$ есть событие, т. е. $A \in$

$\in S$, то число $P(A)$ называется вероятностью события $A$.

Тройка $(\Omega, S, P)$ называется **вероятностным пространством.**

Так же как и для дискретного вероятностного пространства, из приведенных аксиом следует, в частности:

1) $\varnothing \in S$ и $P(\varnothing) = 0$.

2) Монотонность $P$: $A \subset B \to P(A) \leqslant P(B)$.

3) Сильная аддитивность: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

4) $\sigma$-полуаддитивность: $P(\bigcup A_k) \leqslant \Sigma P(A_k)$.

5) Непрерывность относительно монотонных последовательностей. (Запись $A_n \uparrow A$ означает, что $A_n \subset A_{n+1}$ для всех $n$ и $A = \bigcup A_n$. Запись $A_n \downarrow A$ означает, что $A_n \supset A_{n+1}$ для всех $n$ и $A = \bigcap A_n$.)

а) $A_n \uparrow A \to P(A_n) \to P(A)$,

б) $A_n \downarrow A \to P(A_n) \to P(A)$.

### 1.2. Теорема о продолжении вероятности.

Через $\mathscr{P}(\Omega)$ обозначим класс всех подмножеств множества $\Omega$.

**01.** Класс $S \subset \mathscr{P}(\Omega)$ называется **полуалгеброй** множеств, если

1) $\varnothing$ и $\Omega \in S$;

2) $A_1 \in S$, $A_2 \in S \to A_1 \cap A_2 \in S$;

3) $A \in S \to A^c = \sum_1^n A_k$ для некоторых попарно непересекающихся подмножеств $A_1, \ldots, A_n$ из класса $S$.

**02.** Класс $S \subset \mathscr{P}(\Omega)$ называется **алгеброй** множеств, если

1) $\varnothing$ и $\Omega \in S$;

2) $A \in S \to A^c \in S$;

3) $A_1 \in S$, $A_2 \in S \to A_1 \cup A_2 \in S$, $A_1 \cap A_2 \in S$.

**Замечание.** Это определение содержит излишние требования. Например, достаточно требовать, чтобы

1) $\varnothing \in S$;

2) $A \in S \to A^c \in S$;

3) $A_1 \in S$, $A_2 \in S \to A_1 \cap A_2 \in S$.

**03.** Класс $S \subset \mathscr{P}(\Omega)$ называется **$\sigma$-алгеброй** множеств, если

1) $S$ есть алгебра множеств;

2) $\{A_k\} \subset S \to \bigcup A_k \in S$.

Очевидно, что

$S$ есть σ-алгебра $\Rightarrow S$ есть алгебра $\Rightarrow S$ есть полуалгебра.

**04.** Пусть $K \subset \mathscr{P}(\Omega)$. Алгебра $S \subset \mathscr{P}(\Omega)$ называется **минимальной алгеброй**, содержащей $K$, если $K \subset S$ и $S$ содержится в любой алгебре, содержащей $K$.

Такая минимальная алгебра существует: она равна (теоретико-множественному) пересечению всех алгебр, содержащих $K$. Отметим, что множество алгебр, содержащих $K$, непустое: например, $\mathscr{P}(\Omega)$ есть алгебра, содержащая $K$. Отметим еще, что (теоретико-множественное) пересечение алгебр множеств есть алгебра множеств.

Аналогично определяется минимальная σ-алгебра, содержащая $K$, и аналогично доказывается ее существование.

**05.** Числовая функция $P$ на полуалгебре $S \subset \mathscr{P}(\Omega)$ называется **вероятностью**, если она

1) неотрицательна, т. е. $P(A) \geqslant 0$ для всех $A \in S$;

2) σ-аддитивна, т. е. если $\{A_k\} \subset S$, $\bigcup A_k \in S$ и множества $\{A_k\}$ попарно не пересекаются, то

$$P(\Sigma A_k) = \Sigma P(A_k);$$

3) нормирована, т. е. $P(\Omega) = 1$.

**06.** Пусть $P_1$ и $P_2$ — вероятности на полуалгебрах $S_1$ и $S_2$ соответственно. Вероятность $P_2$ называется **продолжением** вероятности $P_1$, если

1) $S_1 \subset S_2$;

2) $P_2(A) = P_1(A)$ для всех $A \in S_1$.

**07.** Вероятность $P_0$ на полуалгебре $S_0$ **допускает единственное продолжение** на полуалгебру $S \supset S_0$, если для любой пары продолжений $P_1$ и $P_2$ с $S_0$ на $S$ выполнено

$$P_1(A) = P_2(A) \text{ для всех } A \in S.$$

**Теорема 1** (о продолжении вероятности). Вероятность $P_0$ на полуалгебре $S_0$ допускает единственное продолжение $P$ на минимальную σ-алгебру $S$, содержащую $S_0$.

Приведем примеры полуалгебр множеств.

**Пример 1.** Пусть $\Omega = [a, b]$, тогда класс $S$ множеств вида

$$(\alpha, \beta),\ (\alpha, \beta],\ [\alpha, \beta),\ [\alpha, \beta]$$

является полуалгеброй.

**Пример 2.** То же самое получится, если положить

$$\Omega = (a, b],\ S = \{(\alpha, \beta] : a \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b\}.$$

В этом случае

$$A = (\alpha, \beta] \in S \Rightarrow A^c = (a, \alpha] + (\beta, b].$$

**Пример 3.** Пусть $\Omega = R^1 = (-\infty, \infty)$. Тогда

$$S = \{(\alpha, \beta] : -\infty \leqslant \alpha \leqslant \beta < \infty\} \cup \{(\alpha, \infty) : \alpha \geqslant -\infty\}$$

есть полуалгебра. В этом случае

$$(\alpha, \beta]^c = (-\infty, \alpha] + (\beta, \infty) \text{ при } -\infty \leqslant \alpha \leqslant \beta < \infty,$$

$$(\alpha, \infty)^c = (-\infty, \alpha] \text{ при } \alpha \geqslant -\infty.$$

**Пример 4.** Пусть $a = (a_1, \ldots, a_n) \in R^n$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in R^n$,

$$\Omega = (a, b] = (a_1, b_1] \times \ldots \times (a_n, b_n] \subset R^n.$$

Тогда

$$S = \{(\alpha, \beta] = (\alpha_1, \beta_1] \times \ldots \times (\alpha_n, \beta_n] : a_k \leqslant \alpha_k \leqslant \beta_k \leqslant b_k \forall k\}$$

есть полуалгебра $\subset \mathscr{P}(\Omega)$.

**Замечание.** Отметим, что минимальная $\sigma$-алгебра, содержащая полуалгебру $S$ в примерах 1—4, есть класс борелевских множеств, содержащихся в $\Omega$.

**Пример 5** (прямое произведение полуалгебр). Пусть $S_k$ — полуалгебра подмножеств множества $\Omega_k$; $k = 1, \ldots, n$. Положим

$$\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n,$$

$$S = S_1 \times \ldots \times S_n = \{A = A_1 \times \ldots \times A_n : A_k \in S_k \forall k\}.$$

Тогда $S \subset \mathscr{P}(\Omega)$ является полуалгеброй (равной прямому произведению полуалгебр $S_1, \ldots, S_n$). Действительно, при $n = 2$

$$\varnothing = \varnothing \times \varnothing \in S;\quad \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \in S;$$

$$A = A_1 \times A_2 \in S,\ B = B_1 \times B_2 \in S \Rightarrow A \cap B = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2) \in S;$$

$$A = A_1 \times A_2 \in S \Rightarrow A^c = A_1 \times A_2^c + A_1^c \times A_2 + A_1^c \times A_2^c = \sum_j (A_1 \times A_{2j}) + \sum_i (A_{1i} \times A_2) + \sum_{i,j} (A_{1i} \times A_{2j}),$$

и все слагаемые принадлежат $S$; здесь

$$A_1^c = \sum_i A_{1i},\ A_{1i} \in S_1; \qquad A_2^c = \sum_j A_{2j},\ A_{2j} \in S_2.$$

Приведем теперь примеры вероятностей на полуалгебрах.

**Пример 6.** Рассмотрим полуалгебру $S$ из примера 1 и положим

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

для всякого промежутка $A \in S$. Здесь $|A|$ — длина промежутка $A$. Тогда числовая функция $P$ на $S$ есть вероятность.

**Пример 7.** Рассмотрим вновь полуалгебру $S$ из примера 1 и неубывающую функцию $F$ на $(-\infty, \infty)$ такую, что $F(a-0)=0$, $F(b+0)=1$. Положим

$$P(\alpha, \beta) = F(\beta-0) - F(\alpha+0),$$

$$P(\alpha, \beta] = F(\beta+0) - F(\alpha+0),$$

$$P[\alpha, \beta) = F(\beta-0) - F(\alpha-0),$$

$$P[\alpha, \beta] = F(\beta+0) - F(\alpha-0)$$

для $a \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b$. Числовая функция $P$ на $S$ есть вероятность. Для предыдущего примера в качестве $F$ можно взять непрерывную функцию, равную нулю при $x<a$, равную единице при $x>b$ и линейную на $[a, b]$.

**Пример 8.** Пусть функция $f: R^n \to R^1$ неотрицательна, суммируема и

$$\int_{R^n} f(x)\,dx = 1.$$

Для всякого борелевского множества $A \subset R^n$ положим

$$P(A) = \int_A f(x)\,dx.$$

Этим определяется функция $P$ на $\sigma$-алгебре $\mathbf{B}^n$ борелевских множеств пространства $R^n$. Триплет $(R^n, \mathbf{B}^n, P)$ является вероятностным пространством, которое часто называется непрерывным вероятностным пространством. В этом случае функция $f$ называется **плотностью вероятности** $P$.

**Пример 9** (классическая модель теории вероятностей; геометрическое определение вероятности).

Пусть $R^n \supset \Omega$ — борелевское множество объема $|\Omega| < \infty$

$$f(x) = \frac{1}{|\Omega|} 1_{\Omega(x)} = \begin{cases} \frac{1}{|\Omega|}, & \text{если } x \in \Omega, \\ 0, & \text{если } x \overline{\in} \Omega. \end{cases}$$

Если $\Omega \supset A$ — борелевское множество, то

$$P(A) = \int_A f(x)\,dx = \frac{1}{|\Omega|} \int_A dx = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Этим определяется функция $P$ на $\sigma$-алгебре $S$ борелевских множеств, содержащихся в $\Omega$. Таким образом, в вероятностном пространстве $(\Omega, S, P)$ вероятность $P(A)$ пропорциональна объему множества $A \in S$. В этом случае говорят еще, что элементарные события $\omega \in \Omega$ равновозможны, или равновероятны.

### 1.3. Случайная величина.

С понятием случайной величины связывается представление о стохастическом эксперименте, состоящем в измерении некоторой числовой величины $\xi$. При этом предполагается, что для всякого числа $c$ можно говорить о событии, состоящем в том, что $\xi < c$ (и даже о вероятности этого события). В связи с этим случайная величина определяется следующим образом.

**Определение.** Пусть $(\Omega, S, P)$ — некоторое вероятностное пространство. Числовая функция $\xi : \Omega \to R^1$ такая, что для всякого числа $c$ множество

$$\{\xi < c\} = \{\omega : \xi(\omega) < c\} \subset \Omega$$

есть событие, т. е. $\{\xi < c\} \in S$, называется **случайной величиной** (сл. в.).

Следующее утверждение позволяет дать другое эквивалентное определение сл. в.

**Лемма.** Следующие утверждения равносильны:

1. $c \in R^1 \Rightarrow \{\xi < c\} \in S$.
2. $B \in \mathbf{B} \Rightarrow \{\xi \in B\} \in S$.

Здесь $\mathbf{B}$ — класс ($\sigma$-алгебра) борелевских множеств на прямой $R^1$, а запись $\{\xi \in B\}$ обозначает прообраз множества $B$ при отображении $\xi$, т. е.

$$\{\xi \in B\} = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in B\} = \xi^{-1}(B).$$

**Теорема 1.** Пусть $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(R^1)$ и $\sigma(\mathcal{E}) = \mathbf{B}$. Чтобы отображение $\xi : \Omega \to R^1$ было сл. в., необходимо и достаточно, чтобы

$$\{\xi \in E\} \in S \text{ для всех } E \in \mathcal{E}.$$

Здесь $\sigma(\mathcal{E})$ — минимальная $\sigma$-алгебра, содержащая $\mathcal{E}$.

### 1.4. Операции над случайными величинами.

Числовая функция, заданная на прямой, называется **борелевской**, если прообраз каждого борелевского множества есть борелевское множество.

Пусть $\xi$ — сл. в., $\varphi$ — борелевская функция, тогда $\eta = \varphi(\xi)$ есть сл. в. Коротко: борелевская функция от сл. в. есть сл. в.; в частности, непрерывная функция от сл. в. есть сл. в. Например, если $\xi$ — сл. в., то

$$\xi^2,\ |\xi|,\ \xi^+ = \max(0, \xi)$$

есть также сл. в. Если $\xi$ — сл. в. и $\xi(\omega) \neq 0$ для всех $\omega$, то $1/\xi$ есть также сл. в., так как $1/\xi = \varphi(\xi)$, где функция $\varphi : R^1 \to R^1$, определяемая как

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

является борелевской.

Функция $\varphi : R^n \to R^1$ называется борелевской функцией ($n$ переменных), если прообраз каждого борелевского множества в $R^1$ есть борелевское множество в $R^n$.

Пусть $\varphi : R^n \to R^1$ есть борелевская функция и $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — сл. в., тогда $\eta = \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ есть сл. в. В частности, сумма, разность, произведение и частное двух сл. в. при условии, что знаменатель не обращается в нуль, есть снова сл. в.

Если $\{\xi_n,\ n \geqslant 1\}$ — последовательность сл. в., то $\sup \xi_n$, $\inf \xi_n$, $\overline{\lim}\, \xi_n$ и $\underline{\lim}\, \xi_n$ есть также сл. в. В частности, если для каждого $\omega \in \Omega$ существует $\lim \xi_n(\omega) = \xi(\omega)$, то $\xi$ есть сл. в.

### 1.5. Независимость.

Два класса событий $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ называются независимыми, если

$$P(A_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$$

Для всех $A_1 \in \mathcal{E}_1$ и $A_2 \in \mathcal{E}_2$. В частности, если классы $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ независимы и каждый из классов $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ состоит из одного события $A_1$ и $A_2$ соответственно, то говорят, что события $A_1$ и $A_2$ независимы.

Пусть $\{\mathcal{E}_i : i \in I\}$ — семейство классов событий. Классы этого семейства называются независимыми, если для любого конечного множества $J \subset I$

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

для всех $A_j \in \mathcal{E}_j$, $j \in J$.

Следующая теорема дает достаточное условие независимости $\sigma$-алгебр событий. Класс событий $\mathcal{E}$ называется мультипликативным классом, или $\pi$-классом, если он замкнут относительно операции конечного пересечения, т. е. $A \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{E}$ влечет $AB \in \mathcal{E}$.

**Теорема 2.** Пусть $\{\mathcal{E}_i : i \in I\}$ — семейство классов событий. Предположим, что каждый класс этого семейства является мультипликативным. Тогда для независимости $\sigma$-алгебр $\{\sigma(\mathcal{E}_i) : i \in I\}$ достаточна (и необходима) независимость классов $\{\mathcal{E}_i : i \in I\}$.

Две действительные сл. в. $\xi_1$ и $\xi_2$ называются независимыми, если для любых чисел $c_1$ и $c_2$ события

$$(\xi_1 < c_1) = \{\omega : \xi_1(\omega) < c_1\} \text{ и } (\xi_2 < c_2) = \{\omega : \xi_2(\omega) < c_2\}$$

независимы. Пусть теперь $\{\xi_i : i \in I\}$ — семейство сл. в., заданных на одном и том же вероятностном пространстве. Говорят, что сл. величины этого семейства независимы (в совокупности или взаимно), если для любого набора чисел $\{c_i : i \in I\}$ события

$$\{(\xi_i < c_i) : i \in I\}$$

независимы.

Два сл. вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ и $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ независимы, если для любых наборов чисел $c = (c_1, \ldots, c_m)$ и $d = (d_1, \ldots, d_n)$ события

$$(\xi < c) = (\xi_1 < c_1, \ldots, \xi_m < c_m) \text{ и}$$
$$(\eta < d) = (\eta_1 < d_1, \ldots, \eta_n < d_n)$$

независимы. Аналогично определяется независимость сл. векторов семейства $\{\xi_i : i \in I\}$.

**Теорема 3.** Пусть

$$\varphi_k : R^{n_k} \to R^{m_k}$$

есть борелевская функция и $\xi_k$ — сл. вектор размерности $n_k$; $k=1, \ldots, s$. Если сл. векторы $\xi_1, \ldots, \xi_s$ независимы, то сл. векторы

$$\eta_k = \varphi_k(\xi_k),\ k=1, \ldots, s,$$

также независимы.

### 1.6. Математическое ожидание. Функция распределения. Плотность распределения.

Сл. в. называется **дискретной**, если она принимает конечное или счетное число значений.

Пусть дискретная сл. в. $\xi$ принимает значения из $\{x_n\}$ и $A_n=\{\xi=x_n\}$. Дискретная сл. в. называется интегрируемой (или суммируемой), если ряд

$$\Sigma x_n P(A_n)$$

сходится абсолютно. Значение этого ряда обозначается через

$$E\xi = \Sigma x_n P(A_n)$$

и называется математическим ожиданием интегрируемой дискретной сл. в. $\xi$.

Сл. в. $\xi$ называется **интегрируемой**, если существует последовательность $\{\xi_n\}$ интегрируемых дискретных сл. в., равномерно сходящаяся к сл. в. $\xi$ (как функции от $\omega\in\Omega$). При этом число

$$E\xi = \lim_{n\to\infty} E\xi_n$$

называется **математическим ожиданием** (м. о.) интегрируемой сл. в. $\xi$.

Математическое ожидание сл. в. $\xi$ обозначается еще как

$$E\xi = \int_\Omega \xi(\omega) P(d\omega) = \int_\Omega \xi dP,$$

и является интегралом Лебега суммируемой функции $\xi : \Omega \to R^1$ по мере $P$.

Если $L$ есть совокупность интегрируемых сл. в., а $E : L \to R^1$ есть операция м. о., то

1) функционал $E$ линейный;

2) функционал $E$ монотонный, т. е. $\xi_1 \leqslant \xi_2$ (это означает $\xi_1(\omega) < \xi_2(\omega) \forall \omega$) влечет $E\xi_1 < E\xi_2$;

3) $\xi_1 \in L$, $\xi_2 \in L$, $P(\xi_1 = \xi_2) = 1$ влечет $E\xi_1 = E\xi_2$;

4) Если сл. в. $\xi_1$ и $\xi_2$ интегрируемы и независимы, то сл. в. $\xi_1 \cdot \xi_2$ интегрируема и

$$E(\xi_1 \cdot \xi_2) = E\xi_1 \cdot E\xi_2.$$

Если $\xi$ — сл. в., то функция $F$, определяемая выражением

$$F(x) = P(\xi < x) \quad \forall x \in R^1,$$

называется **функцией распределения** (ф. р.) сл. в. $\xi$. Чтобы подчеркнуть зависимость ф. р. $F$ от сл. в. $\xi$, ее часто обозначают через $F_\xi$.

Отметим, что ф. р. $F$

1) неубывает на $R^1$;

2) непрерывна слева;

3) $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.

Всякая функция $F$, удовлетворяющая условиям 1) — 3), является ф. р. некоторой сл. в. на некотором вероятностном пространстве.

**Теорема 4.** Пусть $\xi$ — сл. в., $F_\xi$ — ее ф. р., $\varphi$ — борелевская функция, тогда

$$E\varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dF_\xi(x),$$

причем $\varphi(\xi) \in L$, если и только если существует интеграл справа. В частности, если $\varphi(x) = x$, то

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF_\xi(x)$$

и обе части существуют одновременно.

Пусть $F$ — ф. р. и существует суммируемая неотрицательная функция $f : R^1 \to R^1$ такая, что

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\, du \quad \forall x \in R^1.$$

Такая функция $f$ называется **плотностью** ф. р. $F$.

В частности, если существует плотность $f$ ф. р. $F$ сл. в. $\xi$, то

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

и обе части существуют одновременно.

Если $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — сл. величины, то функция $F$, определяемая соотношением

$$F(x)=F(x_1, \ldots, x_n)=P(\xi_1<x_1, \ldots, \xi_n<x_n)$$

$$\forall x=(x_1, \ldots, x_n)\in R^n,$$

называется **совместной ф. р. сл. величин** $\xi_1, \ldots, \xi_n$, или ф. р. сл. вектора $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Очевидно, что сл. в. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы, если и только если

$$F(x_1, \ldots, x_n)=F_1(x_1)\ldots F_n(x_n) \quad \forall x=(x_1, \ldots, x_n)\in R^n,$$

где

$$F_k(x_k)=P(\xi_k<x_k) \quad \forall k.$$

Пусть существует суммируемая неотрицательная функция $f: R^n\to R^1$ такая, что

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)\,du \quad \forall x\in R^n,$$

т. е.

$$F(x_1, \ldots, x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\ldots\int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, \ldots, u_n)\times$$

$$\times\, du_1\ldots du_n \;\forall (x_1, \ldots, x_n)\in R^n.$$

Такая функция $f$ называется **плотностью** ф. р. $F$. Очевидно, что если ф. р. $F_1, \ldots, F_n$ сл. в. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ допускают плотности $f_1, \ldots, f_n$ соответственно и сл. в. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы, то совместная ф. р. $F$ сл. величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ допускает плотность $f$ и

$$f(x_1, \ldots, x_n)=f_1(x_1)\ldots f_n(x_n) \quad \forall (x_1, \ldots, x_n)\in R^n.$$

### 1.7. Свойства непрерывности операции математического ожидания.

Укажем основные свойства пространства $L$ интегрируемых сл. в. и операции математического ожидания.

1. **Теорема Беппо Леви.** Пусть последовательность $\{\xi_n\}\subset L$ удовлетворяет условию $\xi_n\uparrow\xi$ п. н. и $E\xi_n\leqslant c=$ $=\text{const}$. Тогда $\xi\in L$ и $E\xi=\lim\limits_{n\to\infty} E\xi_n$.

2. **Теорема Лебега.** Пусть опять $\{\xi_n\}\subset L$ и $\xi_n\to\xi$ п. н., $|\xi_n|\leqslant\xi_0\in L$ п. н. Тогда $\xi\in L$ и $E\xi=\lim\limits_{n\to\infty} E\xi_n$.

3. **Лемма Фату.** Пусть $\{\xi_n\} \subset L$, $\xi_n \to \xi$ п.н. и $E|\xi_n| \leqslant c = \text{const}$. Тогда $\xi \in L$ и $E|\xi| \leqslant c$.

4. **Теорема о полноте.** Пространство интегрируемых сл.в., в котором совпадающие п.н. сл. величины считаются эквивалентными, является полным относительно нормы $\|\xi\| = E|\xi|$.

### 1.8. Характеристическая функция.

Пусть $\xi$ — сл.в., тогда $e^{it\xi}$ есть тоже сл.в. Здесь $t$ — действительное число. При этом по определению $\xi + i\eta$ есть комплексная сл.в., если $\xi$ и $\eta$ есть действительные сл.в. Так как сл.в. $e^{it\xi}$ ограничена по модулю (единицей), то она интегрируема, т. е. существует $Ee^{it\xi}$. Функция

$$\varphi(t) = Ee^{it\xi}$$

действительного переменного $t$ называется **характеристической функцией** (х.ф.) сл.в. $\xi$. Отметим, что

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x),$$

где

$$F(x) = F_\xi(x) = P(\xi < x).$$

Укажем основные простые свойства х.ф.

**Свойство 1.** Если для некоторого целого числа $n \geqslant 1$ существует $E\xi^n$ (т. е. $E|\xi|^n < \infty$), то х.ф. $\varphi(t)$ дифференцируема $n$ раз и

$$\varphi^{(n)}(0) = i^n E\xi^n.$$

Это свойство позволяет определять моменты сл.в. по х.ф.

**Свойство 2.** Пусть $\xi_1$ и $\xi_2$ — независимые сл.в., $\varphi_1$ и $\varphi_2$ — соответствующие х.ф. и $\xi = \xi_1 + \xi_2$. Тогда

$$\varphi(t) = Ee^{it\xi} = \varphi_1(t) \cdot \varphi_2(t),$$

т. е. х.ф. суммы независимых сл.в. равна произведению х.ф. слагаемых сл.в.

**Свойство 3** (теорема единственности). Х. ф.

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x), \quad -\infty < t < \infty,$$

однозначно определяет ф.р. $F$.

## 1.9. Примеры распределений непрерывного типа.

**Пример 10.** Распределение

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} du, \quad -\infty < x < \infty,$$

называется **нормальным распределением** и обозначается $N(\mu, \sigma^2)$. Плотность и х. ф. такого распределения равны

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$\varphi(t) = e^{it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

Нормальное распределение $N(0, 1)$ называется **стандартным.**

Пусть сл. в. $\xi_1$ и $\xi_2$ независимы и каждая имеет нормальное распределение $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ и $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ соответственно. Тогда сл. в. $\xi = \xi_1 + \xi_2$ имеет нормальное распределение $N(\mu, \sigma^2)$, где $\mu = \mu_1 + \mu_2$, $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

Если сл. в. $\xi$ имеет нормальное распределение $N(\mu, \sigma^2)$, то сл. в. $\eta = a\xi + b$ имеет распределение $N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

**Пример 11.** Гамма-распределение.

Напомним, что по определению гамма-функция есть

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty u^{\lambda-1} e^{-u} du, \quad \lambda > 0.$$

В частности, $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(\lambda+1) = \lambda\Gamma(\lambda)$. Распределение с ф. р. и х. ф.

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^x u^{\lambda-1} e^{-u} du, \quad x > 0; \quad F(+\infty) = 1;$$

$$\varphi(t) = (1 - it)^{-\lambda}$$

называется **гамма-распределением** и обозначается $G(\lambda)$. Если $\xi$ имеет распределение $G(\lambda)$, то $E\xi = \operatorname{var}\xi = \lambda$. Если $\lambda$ — целое число, то иногда это распределение называют распределением Эрланга.

**Пример 12.** Бета-распределение.

Напомним, что бета-функция определяется соотношением

$$B(\lambda_1, \lambda_2) = \int_0^1 u^{\lambda_1-1}(1-u)^{\lambda_2-1}du; \ \lambda_1 > 0, \ \lambda_2 > 0.$$

Связь между бета- и гамма-функцией заключается в равенстве

$$B(\lambda_1, \lambda_2) = \Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)/\Gamma(\lambda_1+\lambda_2).$$

Распределение сл. в. $\xi$ на отрезке $[0, 1]$, задаваемое формулой

$$F(x) = \frac{1}{B(\lambda_1, \lambda_2)} \int_0^x u^{\lambda_1-1}(1-u)^{\lambda_2-1}du, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

называется **бета-распределением** и обозначается $\mathrm{Be}(\lambda_1, \lambda_2)$.

$$E\xi = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}, \ \operatorname{var}\xi = \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2)^2(\lambda_1+\lambda_2+1)}.$$

Если $\xi_1$ и $\xi_2$ — независимые сл. в., имеющие гамма-распределения $G(\lambda_1)$ и $G(\lambda_2)$ соответственно, то сл. в.

$$\xi = \frac{\xi_1}{\xi_1+\xi_2}$$

имеет бета-распределение $\mathrm{Be}(\lambda_1, \lambda_2)$.

### 1.10. Характеристическая функция векторной сл. в.

Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_r)$ — векторная сл. в., тогда $e^{i(t,\xi)}$ есть комплексная сл. в. Здесь $t = (t_1, \ldots, t_r)$ и $(t, \xi) = \sum_{k=1}^{r} t_k\xi_k$. Так как сл. в. $e^{i(t,\xi)}$ ограничена по модулю (единицей), то она интегрируема. Функция

$$\varphi(t) = Ee^{i(t,\xi)}, \ t \in R^r,$$

определенная на $R^r$, называется **характеристической функцией (х. ф.) векторной сл. в.** $\xi$. Отметим, что

$$\varphi(t) = \int_{R^r} e^{i(t,x)}dF(x),$$

где

$$F(x)=F_\xi(x)=P(\xi<x)=P(\xi_1<x_1,\ \ldots,\ \xi_r<x_r)$$

для $x=(x_1, \ldots, x_r)\in R^r$.

Укажем основные простые свойства х. ф. векторной сл. в.

**Свойство 1.** Положим

$$\xi^n=\xi_1^{n_1}\ldots\xi_r^{n_r},$$

где компоненты вектора $n=(n_1, \ldots, n_r)$ — целые неотрицательные числа. Аналогично, если $D_k=\partial/\partial t_k$ — оператор частного дифференцирования функций от $t=(t_1, \ldots, t_r)\in R^r$, то по определению

$$D=(D_1, \ldots, D_r),\ D^n=D_1^{n_1}\ldots D_r^{n_r}\left(=\frac{\partial^{|n|}}{\partial t_1^{n_1}\ldots\partial t_r^{n_r}}\right);$$

$$|n|=n_1+\ldots+n_r.$$

Если существует $E\xi^n$ (т. е. $E|\xi^n|<\infty$), то существует $D^n\varphi(t)$ и

$$D^n\varphi(0)=i^{|n|}\cdot E\xi^n.$$

Это свойство позволяет определять смешанные моменты векторной сл. в. по х. ф.

**Свойство 2.** Пусть $\xi_1$ и $\xi_2$ — независимые векторные сл. в. одинаковой размерности; $\varphi_1$ и $\varphi_2$ — соответствующие х. ф. и $\xi=\xi_1+\xi_2$. Тогда

$$\varphi(t)=Ee^{i(t,\xi)}=\varphi_1(t)\cdot\varphi_2(t),$$

т. е. х. ф. суммы независимых векторных сл. в. равна произведению х. ф. слагаемых сл. в.

**Свойство 3** (теорема единственности). Х. ф.

$$\varphi(t)=\int_{R^r}e^{i(t,x)}\,dF(x),\quad t\in R^r,$$

однозначно определяет ф. р. $F$.

### 1.11. Неравенства.

Приведем некоторые полезные неравенства.

а) **Неравенство Маркова**:

$$P(|\xi|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{E|\xi|^k}{\varepsilon^k}$$

для всякой сл. в. $\xi$ и чисел $k\geqslant 0$ и $\varepsilon>0$.

**Следствие.** Полагая $k=2$ и заменяя $\xi$ на $\xi-E\xi$, получаем **неравенство Чебышева**:

$$P\{|\xi-E\xi|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{\operatorname{var}\xi}{\varepsilon^2}.$$

б) Пусть $\xi$ — векторная сл. в. со значениями из выпуклого множества $M\subset R^n$ и $\varphi$ — числовая выпуклая функция, определенная на $M$. Если существуют $E\xi$ и $E\varphi(\xi)$, то выполнено **неравенство Иенсена:**

$$\varphi(E\xi)\leqslant E\varphi(\xi).$$

в) **Неравенство Колмогорова.** Если действительные сл. в. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и $E\xi_k=0$, $E|\xi_k|^\alpha<\infty$ $\forall k$ и некоторого $\alpha\geqslant 1$, то для всех $\varepsilon>0$

$$P\left\{\max_k|\xi_1+\ldots+\xi_k|\geqslant\varepsilon\right\}\leqslant\frac{E|\xi_1+\ldots+\xi_n|^\alpha}{\varepsilon^\alpha}.$$

г) **Неравенство Ляпунова.** Если $0<\alpha\leqslant\beta$, то

$$(E|\xi|^\alpha)^{1/\alpha}\leqslant(E|\xi|^\beta)^{1/\beta}.$$

Предполагается, конечно, что используемые моменты существуют (т. е. $E|\xi|^\beta<\infty$).

д) **Неравенство Гёльдера—Минковского:**

$$E|\xi\eta|\leqslant(E|\xi|^p)^{1/p}\cdot(E|\eta|^q)^{1/q},$$

если

$$1/p+1/q=1,\ p>1,\ q>1;$$
$$E|\xi|^p<\infty,\ E|\eta|^q<\infty.$$

### 1.12. Условное математическое ожидание.

Пусть $(\Omega, S, P)$ — основное вероятностное пространство; $\xi$ — сл. в. со значениями в измеримом пространстве $(X, \mathscr{A})$. Положим $\mathscr{F}_\xi=\xi^{-1}(\mathscr{A})$. Ясно, что $\mathscr{F}_\xi\subset S$. Рассмотрим равенство

$$\int_A E(\eta|\xi)\,dP=\int_A\eta\,dP \qquad (*)$$

для любого события $A$.

**Теорема 5.** Для интегрируемой действительной сл. в. $\eta$ равенство $(*)$ для всех $A\in\mathscr{F}_\xi$ определяет $P$-п. н. единственную $\mathscr{F}_\xi$-измеримую сл. в. $E(\eta|\xi)$. Последняя сл. в. называется условным м. о. сл. в. $\eta$ относительно сл. в. $\xi$.

**Теорема 6.** Если σ-алгебра $\mathscr{F} \subset S$ и $\eta$ — интегрируемая действительная сл.в., то равенство (*) для всех $A \in \mathscr{F}$ определяет $P$-п.н. единственную $\mathscr{F}$-измеримую сл.в. $E(\eta|\mathscr{F})$. Последняя сл.в. называется условным м.о. сл.в. $\eta$ относительно σ-алгебры $\mathscr{F}$.

Отметим, что $E(\eta|\xi) = E(\eta|\mathscr{F}_\xi)$.

### ЗАДАЧИ 61—90

**61.** Пусть $\Omega = (0, \infty)$, $S$ — класс всех подмножеств множества $\Omega$ и $P$ — числовая функция на $S$, определяемая формулой

$$P(A) = \sum_{k \in A \cap N} 2^{-k} \text{ для } A \in S,$$

где $N = \{1, 2, \ldots\}$. Является ли $(\Omega, S, P)$ вероятностным пространством?

**62.** Пусть $(X, \mathscr{A}, P)$ — вероятностное пространство и $(Y, \mathscr{B}, Q)$ — триплет, построенный с помощью биективного отображения $f: X \to Y$, где $\mathscr{B} = f(\mathscr{A}) = \{f(A) : A \in \mathscr{A}\}$ и $Q$ — числовая функция на $\mathscr{B}$, определяемая соотношением $Q(B) = P(f(B))$ для $B \in \mathscr{B}$. Проверить, что триплет $(Y, \mathscr{B}, Q)$ является вероятностным пространством.

**63.** Пусть $\Omega = [a, b)$. Показать, что класс

$$S = \{[\alpha, \beta) : a \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b\}$$

подмножеств множества $\Omega$ есть полуалгебра, но не алгебра.

**64.** Пусть класс $K$ подмножеств множества $\Omega$ состоит из одного элемента $A \subset \Omega$. Найти минимальную алгебру, содержащую $K$.

**65.** Пусть $K = \{A_1, \ldots, A_n\}$ есть разбиение $\Omega$, т. е.

1) множества $A_1, \ldots, A_n$ попарно не пересекаются и

2) $\bigcup_1^n A_i = \Omega$.

Доказать, что минимальная алгебра, содержащая $K$, есть класс всех объединений множеств $\varnothing = A_0, A_1, \ldots, A_n$.

**66.*** Обозначим через $S$ класс множеств вида $F \cap G$, где $F$ — замкнутое, а $G$ — открытое множество из $R^1$. Показать, что $S$ есть полуалгебра, но не алгебра.

**67.** Пусть $K$ — произвольный класс подмножеств множества $\Omega$. Образуем последовательно: 1) класс $K_1$, состоящий из $\varnothing$, $\Omega$ и из $A \subset \Omega$ таких, что либо $A \in K$, либо $A^c \in K$; 2) класс $K_2$ конечных пересечений множеств из $K_1$; 3) класс $K_3$ конечных объединений множеств из $K_2$. Показать, что $K_3$ есть минимальная алгебра, содержащая $K$.

**68.** Пусть $\{A_n : n = 1, 2, \ldots\}$ — последовательность подмножеств $\Omega$. Положим $\overline{\lim} A_n$ — множество элементов $\omega \in \Omega$, принадлежащих бесконечному числу множеств $A_n$; $\underline{\lim} A_n$ — множество элементов $\omega \in \Omega$, принадлежащих всем множествам $A_n$, кроме, быть может, конечного числа этих множеств. Показать, что

1) $\underline{\lim} A_n \subset \overline{\lim} A_n$;

2) $\underline{\lim} A_n = \bigcup_{n \geqslant 1} \bigcap_{k \geqslant n} A_k$, $\overline{\lim} A_n = \bigcap_{n \geqslant 1} \bigcup_{k \geqslant n} A_k$;

3) $(\underline{\lim} A_n)^c = \overline{\lim} A_n^c$;

4) $\overline{\lim} (A_n \cup B_n) = \overline{\lim} A_n \cup \overline{\lim} B_n$;

5) Если

$$A_n = \begin{cases} A \text{ при четном } n, \\ B \text{ при нечетном } n, \end{cases}$$

то $\overline{\lim} A_n = A \cup B$, $\underline{\lim} A_n = A \cap B$.

**69.** Пусть $\{A_n : n = 1, 2, \ldots\}$ — последовательность подмножеств $\Omega$. Говорят, что существует $\lim A_n$, если $\underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n$. В этом случае

$$\lim A_n = \underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n.$$

1) если $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, то $\lim A_n = \bigcap A_n$;
2) если $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, то $\lim A_n = \bigcup A_n$;
3) если множества $A_n$ попарно не пересекаются, то $\lim A_n = \varnothing$.

**70.** Пусть $(\Omega, S, P)$ — вероятностное пространство, $\{A_n\} \subset S$ и существует $\lim A_n$. Показать, что $P(\lim A_n) = \lim P(A_n)$.

**71.** Пусть $(X, d)$ — метрическое пространство (с метрикой $d$) и $\mathbf{B}$ есть совокупность борелевских множеств этого пространства (т. е. минимальная $\sigma$-алгебра, содержащая все открытые шары простран-

ства). Отображение $\xi : \Omega \to X$ назовем сл. в. (со значениями в метрическом пространстве), если

$$\{\xi \in B\} = \{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in S \text{ для всех } B \in \mathbf{B}.$$

Показать, что отображение $\xi : \Omega \to X$ есть сл. в., если и только если

$$\{\xi \in E\} \in S \text{ для всех открытых шаров } E.$$

**72.** Пусть $\xi$ — сл. в. со значениями в метрическом пространстве $(X, d)$, $\varphi$ есть борелевское отображение метрического пространства $(X, d)$ в метрическое пространство $(Y, \rho)$ (т. е. отображение $\varphi : X \to Y$, для которого прообраз борелевского множества элементов из $Y$ есть борелевское множество элементов из $X$). Тогда $\eta = \varphi(\xi)$ есть сл. в. со значениями в метрическом пространстве $(Y, \rho)$.

**73.** Пусть $\xi_1$ и $\xi_2$ — сл. в. со значениями в сепарабельном метрическом пространстве $(X, d)$. Показать, что $d\{\xi_1, \xi_2)$ есть сл. в.

**74.** Пусть $\xi$ и $\eta$ — сл. в. Показать, что множество

$$\{\xi = \eta\} = \{\omega : \xi(\omega) = \eta(\omega)\}$$

есть событие.

**75.** Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность сл. в. Показать, что каждое из множеств

$$\{\lim \xi_n = \xi\} = \{\omega : \lim \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\}$$

и

$$\{\underline{\lim}\, \xi_n = \overline{\lim}\, \xi_n\} = \{\omega : \underline{\lim}\, \xi_n(\omega) = \overline{\lim}\, \xi_n(\omega)\}$$

есть событие.

**76.** Пусть $\nu, \xi_1, \ldots, \xi_n$ — сл. в. на общем вероятностном пространстве и сл. в. $\nu$ принимает значения $0, 1, \ldots, n$ с вероятностью 1. Положим

$$S_0 = 0, \; S_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k, \; 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Показать, что $S_\nu$ есть сл. в.

**77.** Пусть $\eta(\omega) = \xi(\omega)^2$ есть сл. в. Показать, что $\xi(\omega)$ не обязана быть сл. в. (привести пример).

**78.** Множество $A \in S$ называется атомом вероятностного пространства $(\Omega, S, P)$, если а) $P(A) > 0$ и б) $S \ni B \subset A$ влечет либо $P(B) = 0$, либо $P(A \setminus B) = 0$. Показать, что

1° Если $A$ и $B$ — атомы, то либо $P(A \triangle B) = 0$, либо $P(AB) = 0$.

2°. Множество различных атомов не более чем счетно (два атома $A$ и $B$ совпадают по определению, если $P(A \triangle B) = 0$).

3°. Существует разбиение $\Omega = A_0 + \sum_{i \geqslant 1} A_i$ на непересекающиеся множества $\{A_0, A_1, \ldots\} \subset S$, в котором $A_1, A_2, \ldots$ есть атомы, а множество $A_0$ не содержит атомов. ($A_0$ называется неатомической частью вероятностного пространства, а $\sum_{i \geqslant 1} A_i = \Omega \setminus A_0$ — атомической. Если $P(A_0) = 0$, то вероятностное пространство называется атомическим.)

4°. Для всякого числа $p$ такого, что $0 \leqslant p \leqslant P(A_0)$ существует $A \in S$, что $P(A) = p$.

**79.*** Пусть $(\Omega, S, P)$ — вероятностное пространство. Доказать, что множество $\{P(A) : A \in S\}$ замкнуто.

**80.** Если $A$ есть атом и $\xi$ — сл. в., то существует число $c$ такое, что

$$P(\xi = c \mid A) = 1$$

(т. е. на каждом атоме сл. в. принимает постоянные значения с точностью до множества нулевой вероятности).

**81.** А. Предположим, что сл. в. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и каждая имеет равномерное распределение на (0,1). Положим

$$U = \min_i \xi_i, \quad V = \max_i \xi_i,$$

$$D = V - U, \quad R = U/V.$$

Если $\xi$ — сл. в., то будем обозначать через $F_\xi$ и $f_\xi$ ее ф. р. и плотность. Показать, что

а) $F_V(x) = x^n$, $f_V(x) = nx^{n-1}$, $0 < x < 1$;

$$EV = \frac{n}{n+1}, \quad \operatorname{var} V = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}.$$

б) $F_U(x) = 1 - (1-x)^n$, $f_U(x) = n(1-x)^{n-1}$, $0 < x < 1$

$$EU = 1/(n+1), \quad \operatorname{var} U = \operatorname{var} V.$$

в) $F_{UV}(u, v) = v^n - (v-u)^n$,

$$f_{UV}(u, v) = n(n-1)(v-u)^{n-2}, \quad 0 < u \leqslant v < 1,$$

г) $F_D(x) = nx^{n-1} - (n-1)x^n$; $f_D(x) = n(n-1)\left[x^{n-2} - x^{n-1}\right]$;

$$n \geqslant 2,\ 0 < x < 1;$$

$$ED = \frac{n-1}{n+1},\quad \operatorname{var} D = \frac{2(n-1)}{(n+1)^2(n+2)}.$$

д) $\operatorname{cor}(U, V) = 1/n$.

е) сл. величины $R$ и $\min(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ одинаково распределены.

Б. Предположим, что сл. величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и каждая равномерно распределена в $(0,1)$. Положим

$$U_n = \min(\xi_1, \ldots, \xi_n),\ V_n = \max(\xi_1, \ldots, \xi_n),$$

$$D_n = V_n - U_n,\ R_n = U_n/V_n.$$

Показать, что при $n \to \infty$ $\forall x > 0$

$$\lim P\{nU_n < x\} = 1 - e^{-x},$$

$$\lim P\{n(1 - V_n) < x\} = 1 - e^{-x},$$

$$\lim P\{n(1 - D_n) < x\} = 1 - (1+x)e^{-x},$$

$$\lim P\{nR_n < x\} = 1 - e^{-x}.$$

82. Два лица $A$ и $B$ договорились встретиться между 20 и 21 ч, условившись не ждать более 10 мин. Предположим, что моменты их прибытия к месту встречи независимы и равномерно распределены между 20 и 21 ч. Найти вероятность встречи.

83. Пусть $\xi$ и $\eta$ — сл. в. Обозначим через $f$ и $g$ плотности ф. р. сл. в. $\xi$ и $\eta$ соответственно. Найти $g$, зная $f$, если:

1) $\eta = \xi + c$; 2) $\eta = \sigma\xi + \mu$, $\sigma > 0$; 3) $\eta = \sigma\xi + \mu$, $\sigma < 0$;
4) $\eta = \sigma\xi + \mu$, $\sigma \neq 0$; 5) $\eta = \xi^3$; 6) $\eta = |\xi|$; 7) $\eta = \xi^2$.

84. Предположим, что сл. в. $\xi_1$ и $\xi_2$ независимы и каждая имеет экспоненциальное распределение с параметром $a$, т. е.

$$P(\xi_i < x) = 1 - e^{-ax}\ \forall x \geqslant 0.$$

Показать, что

а) сл. в. $\xi_1/(\xi_1 + \xi_2)$ равномерно распределена на $(0,1)$;

б) сл. величины

$$\xi_1/(\xi_1 + \xi_2) \text{ и } \xi_1 + \xi_2$$

независимы.

85. Предположим, что сл. в. $\xi_1$ и $\xi_2$ независимы и каждая имеет нормальное распределение $N(0,1)$. Показать, что сл. в.

$$\eta = \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2)$$

имеет экспоненциальное распределение с параметром $a=1$, т. е.

$$P(\eta < x) = 1 - e^{-x} \quad \forall x \geqslant 0.$$

86. Пусть ф. р. $F$ случайной величины $\xi$ непрерывна. Показать, что сл. в. $\eta = F(\xi)$ равномерно распределена на $(0,1)$.

87. Пусть сл. в. $\xi$ и $\eta$ независимы и равномерно распределены на $[0, 1]$. Найти вероятность того, что действительны корни квадратного уравнения:

а) $x^2 + \xi x + \eta = 0$;

б) $x^2 + Vx + U = 0$, где $U = \min(\xi, \eta)$, $V = \max(\xi, \eta)$.

88. Предположим, что сл. в. $\xi_1$ и $\xi_2$ независимы и каждая имеет нормальное распределение $N(\mu, \sigma^2)$. Показать, что

$$E\max(\xi_1, \xi_2) = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}, \quad E\min(\xi_1, \xi_2) = \mu - \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}.$$

89. Точка $x \in R^1$ является точкой роста ф. р. $F$, если для всякого $\varepsilon > 0$

$$F(x+\varepsilon) - F(x-\varepsilon) > 0.$$

Привести пример ф. р. дискретной сл. в., для которой каждая точка $x \in R^1$ является точкой роста.

**90.*** Элементы $a_i$ и $a_{i+1}$ в перестановке $(a_1, \ldots, a_n)$ образуют **возрастание**, если $a_i < a_{i+1}$. Считается, что элементу $a_1$ предшествует возрастание. Предполагается, что все числа $a_1, \ldots, a_n$ различны. Через $\eta_n$ обозначим число возрастаний в сл. перестановке (все $n!$ перестановок равновероятны). Предположим еще, что сл. в. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и равномерно распределены на $(0,1)$. Показать, что

а) $$P(\xi_1 + \ldots + \xi_n < x) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{[x]} (-1)^j C_n^j (x-j)^n$$

$$\forall x > 0;$$

б) $$P(\eta_n \leqslant k) = P(\xi_1 + \ldots + \xi_n < k) \quad \forall k = 1, 2, \ldots, n.$$

**61.** Проверим, что $(\Omega, S, P)$ — вероятностное пространство. $S$ есть $\sigma$-алгебра как класс всех подмножеств некоторого множества. Имеем $P(A) \geqslant 0$ $\forall A \in S$ и

$$P(\Omega) = \sum_{k \geqslant 1} 2^{-k_i} = 1.$$

Проверим счетную аддитивность. Пусть $A = \sum_i A_i$. Тогда

$$P(A) = \sum_{k \in AN} 2^{-k} = \sum_i \sum_{k \in A_i N} 2^{-k} = \sum_i P(A_i),$$

где использовано, что $AN = \sum_i A_i N$.

**62.** Биекция $f$ порождает биекцию классов подмножеств $X$ и $Y$, сохраняющую теоретико-множественные операции. Следовательно, $\{f(A) : A \in \mathscr{A}\}$ есть $\sigma$-алгебра и

$$Q(\Sigma B_i) = Q(\Sigma f(A_i)) = Q(f(\Sigma A_i)) =$$
$$= P(\Sigma A_i) = \Sigma P(A_i) = \Sigma Q(B_i),$$

т. е. $(Y, \mathscr{B}, Q)$ — вероятностное пространство.

**63.** Проверим, что $S$ — полуалгебра. Имеем $\varnothing, \Omega \in S$;

$$[\alpha_1, \beta_1) \cap [\alpha_2, \beta_2) = [\max(\alpha_1, \alpha_2), \min(\beta_1, \beta_2)) \in S;$$
$$[\alpha, \beta)^c = [a, \alpha) + [\beta, b).$$

$S$ не является алгеброй, так как $[\alpha, \beta)^c \overline{\in} S$ при $a < \alpha < \beta < b$.

**64.** Покажем, что минимальная алгебра есть $S = \{\varnothing, \Omega, A, A^c\}$. Если алгебра $S$ подмножеств множества $\Omega$ содержит $K$, то в силу определения алгебры $\varnothing$, $\Omega$, $A^c$ принадлежат $S$, т. е. $S \supset S$.

**65.** Проверим, что класс

$$S = \left\{A_J = \sum_{i \in J} A_i : J \subset \{1, \ldots n\}\right\}, \text{ где } \sum_{i \in \varnothing} A_i = \varnothing,$$

есть минимальная алгебра, содержащая $K$. Имеем $S \supset K$, $S$ — алгебра, так как

$$A_{J_1} A_{J_2} = A_{J_1 \cap J_2} \in S, \quad (A_J)^c = A_{J^c} \in S.$$

Если алгебра $S \supset K$, то необходимо $A_J \in S$, т. е. $S \subset S$.

**66.** Проверим, что $S$ — полуалгебра. Если $F_i \cap G_i \in S$, $i=1, 2$, где $F_i$ — замкнутые, $G_i$ — открытые множества из $R^1$, то $(F_1 \cap G_1) \cap (F_2 \cap G_2) = (F_1 \cap F_2) \cap (G_1 \cap G_2) \in S$, так как $F_1 \cap F_2$ — замкнутое, $G_1 \cap G_2$ — открытое множества из $R^1$. Пусть $F \cap G \in S$. Тогда $(F \cap G)^c = F^c \cup G^c = (F^c \setminus G^c) + G^c$, где $F^c \setminus G^c = F^c \cap G$ — открытое множество (как пересечение открытых множеств $F^c$ и $G$), $G^c$ — замкнутое множество. Тем самым, дополнение к элементу из $S$ представляется в виде суммы непересекающихся элементов из $S$.

Покажем, что множество $A = (F \cap G)^c$, где

$F = (-\infty, 0] \cup \left( \bigcup_{n \geqslant 1} \left[ \frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n} \right] \right) \cup [1, \infty)$ — замкнутое множество,

$G = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ — открытое множество

нельзя представить в виде $F_1 \cap G_1$ с замкнутым $F_1$ и открытым $G_1$. Допустим, что такое представление существует. Имеем

$$F \cap G = (-\infty, 0) \cup \left( \bigcup_{n \geqslant 1} \left[ \frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n} \right] \right) \cup [1, \infty),$$

$$A = (F \cap G)^c = \{0\} \cup \left( \bigcup_{n \geqslant 1} \left( \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1} \right) \right).$$

Теперь $A = F_1 \cap G_1$ влечет $0 \in G_1$. Так как $G_1$ открыто, то $\exists\ n_0 \geqslant 1$ такое, что $\frac{1}{2n_0} \in G_1$. Так как замкнутое множество $F_1$ содержит $\left( \frac{1}{2n_0}, \frac{1}{2n_0 - 1} \right)$, то $\frac{1}{2n_0} \in F_1$. Тем самым, $\frac{1}{2n_0} \in F_1 \cap G_1 = A$, что противоречит $\frac{1}{2n_0} \overline{\in} \overline{\in} A$. Итак, $A = (F \cap G)^c \overline{\in} S$, хотя $F \cap G \in S$. Класс $S$ не удовлетворяет определению алгебры.

**67.** $K_3 \supset K$. Если алгебра $S \supset K$, то $S \supset K_3$ в силу определения алгебры. Проверим, что $K_3$ алгебра.

Пусть $A = \bigcup_1^m A_i$, $A_i \in K_2$; $B = \bigcup_1^n B_j$, $B_j \in K_2$. Покажем, что $AB \in K_3$. Так как $AB = \bigcup_{i,j} A_i B_j$, то дос-

таточно проверить, что $A_iB_j \in K_2$. Последнее следует из определения класса $K_2$.

Пусть $A = \bigcup_1^n A_i$, $A_i \in K_2$. Покажем, что $A^c \in K_3$. Так как $A^c = \bigcap_1^n A_i^c$, то, учитывая доказанное выше, достаточно проверить, что $A_i^c \in K_3$. Итак, нужно доказать, что $B = \bigcap_1^m B_j$, $B_j \in K_1$ влечет $B^c \in K_3$. Имеем: $B^c = \bigcup_1^m B_j^c$. Достаточно проверить, что $B_j^c \in K_2$. Последнее верно, так как $B_j^c \in K_1$ в силу определения класса $K_1$.

$\varnothing \in K_3$, так как $\varnothing \in K_1$ и $K_1 \subset K_2 \subset K_3$.

**68.** 1) $\omega \in \underline{\lim}\, A_n \to \exists n : \omega \in A_k \forall k \geqslant n \to \omega \in \overline{\lim}\, A_n$

2) $\omega \in \underline{\lim}\, A_n \Leftrightarrow \exists n : \omega \in A_k \ \forall k \geqslant n \Leftrightarrow \exists n : \omega \in$

$\in \bigcap_{k \geqslant n} A_k \Leftrightarrow \omega \in \bigcup_n \bigcap_{k \geqslant n} A_k$; $\omega \in \overline{\lim}\, A_n \Leftrightarrow \forall n \exists k \geqslant$

$\geqslant n : \omega \in A_k \Leftrightarrow \forall n : \omega \in \bigcup_{k \geqslant n} A_k \Leftrightarrow \omega \in \bigcap_n \bigcup_{k \geqslant n} A_k$

3) $(\underline{\lim}\, A_n)^c = \left(\bigcup_n \bigcap_{k \geqslant n} A_k\right)^c = \bigcap_n \bigcup_{k \geqslant n} A_k^c = \overline{\lim}\, A_n^c$.

4) Докажем равносильное в силу 3) утверждение

$$\underline{\lim}\, A_n B_n = \underline{\lim}\, A_n \cdot \underline{\lim}\, B_n.$$

Имеем:

$\omega \in \underline{\lim}\, A_n B_n \Leftrightarrow \exists n : \omega \in A_k B_k \forall k \geqslant n \Leftrightarrow \exists n : \omega \in$

$\in A_k, \ \omega \in B_k \forall k \geqslant n \Leftrightarrow \exists n_1 : \omega \in A_k \forall k \geqslant n_1$; $\exists n_2 : \omega \in$

$\in A_k, k \geqslant n_2 \Leftrightarrow \omega \in \underline{\lim}\, A_n, \ \omega \in \underline{\lim}\, B_n \Leftrightarrow \omega \in \underline{\lim}\, A_n \times$

$\times \underline{\lim}\, B_n$.

5) $\overline{\lim}\, A_n = \bigcap_n \bigcup_{k \geqslant n} A_k = \bigcap_{n \geqslant 1} (A \cup B) = A \cup B$;

$$\underline{\lim}\, A_n = \bigcup_n \bigcap_{k \geqslant n} A_k = \bigcup_n AB = AB.$$

**69.** 1) $\underline{\lim}\, A_n = \bigcup_n \bigcap_{k \geqslant n} A_k = \bigcup_n \bigcap_{k \geqslant 1} A_k = \bigcap_k A_k$;

$$\overline{\lim}\, A_n = \bigcap_n \bigcup_{k \geqslant n} A_k = \bigcap_n A_n.$$

2) $\underline{\lim} A_n = \bigcup_n \bigcap_{k>n} A_k = \bigcup_n A_n$;

$$\overline{\lim} A_n = \bigcap_n \bigcup_{k>n} A_k = \bigcap_n \bigcup_{k>1} A_k = \bigcup_k A_k.$$

3) Каждое $\omega \in \Omega$ может принадлежать самое большое одному из множеств $A_n$. Согласно определениям $\underline{\lim} A_n = \varnothing = \overline{\lim} A_n$.

**70.**

$$P(\underline{\lim} A_n) = P\left(\bigcup_n \bigcap_{k>n} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{k>n} A_k\right) =$$

$$= \underline{\lim_{n\to\infty}} P\left(\bigcap_{k>n} A_k\right) \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} P(A_n);$$

$$P(\overline{\lim} A_n) = P\left(\bigcap_n \bigcup_{k>n} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k>n} A_k\right) =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} P\left(\bigcup_{k>n} A_k\right) \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} P(A_n);$$

$$P(\lim A_n) = P(\underline{\lim} A_n) \leqslant \underline{\lim} P(A_n) \leqslant \overline{\lim} P(A_n) \leqslant$$

$$\leqslant P(\overline{\lim} A_n) = P(\lim A_n),$$

т. е.

$$P(\lim A_n) = P(\underline{\lim} A_n) = \underline{\lim} P(A_n) = \overline{\lim} P(A_n) =$$

$$= P(\overline{\lim} A_n) = P(\lim A_n),$$

в частности,

$$\underline{\lim} P(A_n) = \overline{\lim} P(A_n) = P(\lim A_n),$$

т. е.

$$\lim P(A_n) = P(\lim A_n).$$

**71.** Если $\xi$ — случайная величина и $E$ — открытый шар, то $\{\xi \in E\} \in S$ в силу $E \in \mathbf{B}$ и определения случайной величины. Обратно, пусть $\{\xi \in E\} \in S$ для всех открытых шаров $E$. Рассмотрим класс $\mathscr{A}$ всех множеств $A \subset X$, для которых $\{\xi \in A\} \in S$. $\mathscr{A}$ есть $\sigma$-алгебра, так как

$$A \in \mathscr{A} \Rightarrow \{\xi \in A^c\} = \{\xi \in A\}^c \in S \Rightarrow A^c \in \mathscr{A};$$

$$A_n \in \mathscr{A} \Rightarrow \{\xi \in \bigcup_n A_n\} = \bigcup_n \{\xi \in A_n\} \in S \Rightarrow \bigcup A_n \in \mathscr{A}.$$

В силу $\{E : E$ — открытый шар$\} \subset \mathscr{A}$ и определения

борелевской σ-алгебры $\mathbf{B}$ имеем $\mathbf{B}\subset\mathscr{A}$, в частности, $\{\xi\in B\}\in S$ $\forall B\in\mathbf{B}$, т. е. $\xi$ — случайная величина.

**72.** Пусть $B$ есть борелевское множество в $Y$; тогда $A=\varphi^{-1}(B)$ есть борелевское множество в $X$. Поэтому

$$\{\eta\in B\}=\{\xi\in A\}\in S.$$

**73.** Для плотной $X$ последовательности $\{x_n,\ n\geqslant 1\}$ имеем для всякого числа $c>0$

$$\{\omega : d(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega)) < c\} =$$

$$= \bigcup_{k\geqslant 1}\bigcup_{\substack{m,n\geqslant 1\\ d(x_n,\ x_m)<c-1/k}} \left\{d(x_n, \xi_1) < \frac{1}{2k}\right\} \cap$$

$$\cap \left\{d(x_m, \xi_2) < \frac{1}{2k}\right\}.$$

Принадлежность рассматриваемого множества $S$ следует из

$$\left\{d(x_n, \xi_i) < \frac{1}{2k}\right\} = \left\{\xi_i \in E\left(x_n, \frac{1}{2k}\right)\right\} \in S,$$

где $E(x, \rho)$ обозначает открытый шар с центром $x$ радиуса $\rho$.

**74. Решение 1.** В силу предыдущей задачи для метрического пространства $(X, d)$, где $X=R^1$, $d(x, y)=|x-y|$, имеем

$$\{\omega : \xi(\omega)=\eta(\omega)\}=\{\omega : d(\xi(\omega), \eta(\omega))=0\}\in S.$$

**Решение 2.**

$$\{\xi=\eta\} = \bigcap_{n\geqslant 1}\bigcup_{x\in Q}\{|\xi-x|<1/n,\ |\eta-x|<1/n\},$$

где $Q$ — множество рациональных чисел.

**75.** Используя определение предела и критерий Коши для сходимости числовой последовательности, получим

$$\{\lim \xi_n = \xi\} = \bigcap_{k\geqslant 1}\bigcup_{N\geqslant 1}\bigcap_{n\geqslant N}\{|\xi_n-\xi|<1/k\}\in S,$$

$$\{\underline{\lim}\,\xi_n = \overline{\lim}\,\xi_n\} = \bigcap_{k\geqslant 1}\bigcup_{N\geqslant 1}\bigcap_{n,m\geqslant N}\{|\xi_n-\xi_m|<1/k\}\in S.$$

**76.** Величина $S_\nu$ определена на множестве

$$A=\{\omega : \nu(\omega)\in\{0, 1, \ldots, n\}\}\in S,\ P(A)=1.$$

Чтобы показать, что $S_\nu$ — случайная величина, достаточно проверить, что для каждого числа $c$

$$\{S_\nu < c\} = A \cap \bigcup_{k=0}^{n} \{S_k < c\} \cap \{\nu = k\} \in S.$$

Для этого достаточно показать, что $S_k$ — случайная величина, для чего достаточно доказать, что $\xi_1 + \xi_2$ — случайная величина. Имеем

$$\{\xi_1 + \xi_2 < c\} = \bigcup_{x \in Q} \{\xi_1 < x,\ \xi_2 < c - x\} \in S,$$

где $Q$ — множество рациональных чисел.

77. Для произвольных вероятностного пространства $(\Omega, S, P)$ и множества $A \subset \Omega$, $A \overline{\in} S$ (например $S = \{\varnothing, \Omega\}$, $A \neq \varnothing$, $A \neq \Omega$, $P(\varnothing) = 0$, $P(\Omega) = 1$) положим $\xi(\omega) = 1$ при $\omega \in A$, $\xi(\omega) = -1$ при $\omega \overline{\in} A$. Тогда

$$\{\omega : \xi(\omega) = 1\} = A \overline{\in} S.$$

Следовательно, $\xi$ не является случайной величиной, но $\xi^2 = 1$ — случайная величина.

78. 1°. Пусть $A$ и $B$ атомы, $P(AB) > 0$. Согласно определению атома $A = (A \setminus B) + AB$ влечет $P(A \setminus B) = 0$; аналогично $P(B \setminus A) = 0$. Следовательно, $P(A \triangle B) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) = 0$.

2°. Существует не более $n$ различных атомов $A$ с $P(A) > 1/n$ (иначе, если $A_1, \ldots, A_{n+1}$ — различные атомы, $P(A_i) > 1/n$, то

$$P\left(\bigcup_1^{n+1} A_i\right) = \sum_1^{n+1} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) +$$

$$+ \sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) - \ldots = \sum_1^{n+1} P(A_i) > 1,$$

что невозможно). Множество различных атомов не более чем счетно как счетное объединение конечных множеств $\mathscr{A}_n$ атомов вероятности большей $1/n$.

3°. Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — все различные атомы. Их можно считать непересекающимися, переходя в случае необходимости к $\tilde{A}_n = A_n \setminus (\bigcup_{k<n} A_k)$. (Проверим что $P(\tilde{A}_n \triangle A_n) = 0$ и что $\tilde{A}_n$ — атомы. Имеем

$$A_n \triangle \tilde{A}_n = \bigcup_{k<n} A_k A_n,$$

$$P\left(A_n \triangle \tilde{A}_n\right) \leqslant \sum_{k<n} P(A_k A_n) = 0.$$

Если $B \subset \tilde{A}_n \subset A_n$, $P(B) > 0$, то $P(\tilde{A}_n \setminus B) \leqslant P(A_n \setminus B) = 0$, т. е. $P(\tilde{A}_n \setminus B) = 0$ и, значит, $\tilde{A}_n$ — атом.)

Множество $A_0 = \Omega \setminus \sum_{n \geqslant 1} A_n$ не содержит атомов. Допустим противное — атом $A \subset A_0$. Тогда $P(A \triangle A_n) = 0$ для некоторого $n$ и так как $A \cap A_n = \varnothing$, $P(A \triangle A_n) = P(A) + P(A_n)$, то $P(A) = 0$, что невозможно.

4°. Множество $S_p$ классов почти наверное равных событий ($A = B$ п.н., если $P(A \triangle B) = 0$) $A \subset A_0$ с $P(A) \leqslant p$ индуктивно упорядочено относительно

$$A \subset B \text{ п.н.} \Leftrightarrow P(A \setminus B) = 0.$$

В самом деле, пусть $\mathscr{E} \subset S_p$ — непустое линейно упорядоченное множество, т. е. $A, B \in \mathscr{E}$ влечет $A \subset B$ п.н. или $B \subset A$ п.н. Здесь $S_p$ обозначает не только множество классов эквивалентных событий $A \subset A_0$ с $P(A) \leqslant p$, но и множество самих событий $A$. Покажем, что существует $A^* \in S_p$ такое, что $A \subset A^*$ п.н. для всех $A \in \mathscr{E}$. Положим $p^* = \sup_{A \in \mathscr{E}} P(A)$. Если $p^* = P(A^*)$ для некоторого $A^* \in \mathscr{E}$, то для каждого $A \in \mathscr{E}$ выполнено $A \subset A^*$ п.н. или $A^* \subset A$ п.н.; в последнем случае $p^* = P(A^*) \leqslant P(A) \leqslant p^*$, откуда $A = A^*$ п.н. Если $P(A) < p^*$ для всех $A \in \mathscr{E}$, то существует последовательность $A_n \in \mathscr{E}$, $n \geqslant 1$, для которой $P(A_n) < P(A_{n+1})\ \forall n$ и $P(A_n) \to p^*$. В этом случае $A_n \subset A_{n+1}$ п.н. Можно считать $A_n \subset A_{n+1}$, переходя, если это необходимо, к $A_n \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1})$. Положим, $A^* = \bigcup_{n \geqslant 1} A_n$. Тогда $P(A^*) = \lim P(A_n) = p^*$. Если $A \in \mathscr{E}$, то либо для некоторого $n$ $A \subset A_n$ п.н. и, следовательно, $A \subset A^*$ п.н., либо $A_n \subset A$ п.н. $\forall n$ и тогда $A^* \subset A$ п. н., откуда, с учетом $p^* = P(A^*) \leqslant P(A) \leqslant p^*$, получаем $A^* = A$ п.н.

По лемме Цорна в $S_p$ существует максимальный элемент $B$, т. е. $B \subset A$ п.н., $A \in S_p$ влечет $A = B$ п.н. Тогда $P(B) = p$. В самом деле, допустим противное: $P(B) < p$. Тогда для $C = A_0 \setminus B$ имеем $P(C) > 0$. Существует последовательность событий $D_n \subset C$, для которой $0 < P(D_n) < (1/2)^n P(C)$ (в самом деле, так как $C$ — не атом, то существует разбиение $C = D_1 + \bar{D}_1$, $0 < P(D_1) \leqslant P(\bar{D}_1)$, откуда $P(D_1) \leqslant (1/2) P(C)$; приме-

няя проведенное рассуждение к $D_1$, получим $D_2$ и так далее). При некотором $n$ для $D=D_n$ имеем $0<P(D)<p-P(B)$. Тогда, положив $\tilde{B}=B+D$, получим $\tilde{B}\subset A_0$, $P(\tilde{B})=P(B)+P(D)<p$, т. е. $\tilde{B}\in S_p$, но $P(\tilde{B})>P(B)$, откуда $\tilde{B}\neq B$ п.н., хотя $\tilde{B}\supset B$ п.н. Получили противоречие с максимальностью $B$.

79. Пусть $P(A_n)\to p\in\overline{P(S)}=\{P(A): A\in S\}$. Переходя, если нужно, к подпоследовательностям $P(A_{n_k})$ или $P(A^c_{n_k})$ (так как $1-p\in\overline{P(S)}$), можно считать $P(A_n)<p$ для всех $n$. Кроме того, считаем $\bigcap\limits_{n\geqslant 1} A_n=\varnothing$ (в противном случае можно взять

$$\tilde{A}_n=A_n\setminus\left(\bigcap_{n\geqslant 1}A_n\right),\ \text{так как}\ p-P\left(\bigcap_{n\geqslant 1}A_n\right)\in\overline{P(S)}).$$

Аналогично предыдущей задаче обозначим $S_p$ множество классов почти наверное равных событий $A\in S$ с $P(A)<p$. Существует максимальный элемент $B$ индуктивно упорядоченного множества $S_p$. Учитывая, что $P(B)<p$, положим $q=p-P(B)>0$. Тогда не существует событий $C\subset B^c$, $C\in S_p$, с $0<P(C)<q$ (существование такого $C$ ведет к противоречию с максимальностью $B$). Кроме того, $P(B^cA_0)=0$, где $A_0$ — неатомическая часть вероятностного пространства, так как, если $P(B^cA_0)>0$, то в силу п. 4° предыдущей задачи 78 существуют $C\subset B^cA_0$ с $0<P(C)<\min(q, P(B^cA_0))$, что невозможно. Следовательно, $B^c=\sum\limits_{i=1}^{m} C_i$, где $C_i$ — атомы с $P(C_i)>q$.

При различных $n$ элемент $A_nB^c$ в множестве классов почти наверное равных событий может принимать только конечное число значений: $C=\sum\limits_{i\in I}C_i$, $I\subset\{1, 2, \ldots, m\}$. Следовательно, существует подпоследовательность последовательности $A_n$ (будем считать, что это сама последовательность $A_n$), для которой $A_nB^c=C$ для всех $n$. Тогда $P(B)\geqslant P(A_nB)=P(A_n)-P(C)\to p-P(C)$, откуда $P(C)\geqslant p-P(B)=q>0$, т. е. $P(C)>0$, что в силу $C\subset\bigcap\limits_{n\geqslant 1}A_n=\varnothing$ п.н. невозможно.

80. В силу определения атома для каждого числа $x$ $P\{(\xi<x)\cap A\}$ равна 0 или $P(A)$. Следовательно, условная функция распределения $F(x)=P(\xi<x|A)$

принимает только значения 0 или 1. Так как $F$ не убывает, $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$, то для некоторого $c$ $F(x)=0$ при $x<c$, $F(x)=1$ при $x>c$. Теперь

$$P(\xi=c/A)=F(c+0)-F(c)=1.$$

**81.** *A.* а) $P(\max \xi_i < x) = \prod_1^n P(\xi_i < x) = x^n$,

$$0 \leqslant x \leqslant 1;$$

$$f_V(x) = (x^n)' = nx^{n-1},\ 0 < x < 1;$$

$$EV = \int_0^1 x \cdot nx^{n-1}dx = \frac{n}{n+1};$$

$$EV^2 = \int_0^1 x^2 \cdot nx^{n-1}dx = \frac{n}{n+2};$$

$$\operatorname{var} V = EV^2 - (EV)^2 = n/[(n+2)(n+1)^2].$$

б) Случайные величины $1-U=\max(1-\xi_i)$ и $V$ одинаково распределены. Следовательно,

$$F_U(x) = P(U < x) = P(1-U > 1-x) = P(V > 1-x) = 1-(1-x)^n;$$

$$f_U(x) = F'_U(x) = n(1-x)^{n-1},\ 0 < x < 1;$$

$$EU = 1 - EV = \frac{1}{n+1};\quad \operatorname{var} U = \operatorname{var}(1-U) = \operatorname{var} V.$$

в) $P(U < u, V < v) = P(V < v) -$

$$- P(U \geqslant u, V < v) = P(V < v) -$$

$$- \prod_1^n P(u \leqslant \xi_i < v) = v^n - (v-u)^n,$$

$$0 \leqslant u \leqslant v \leqslant 1;$$

$$f_{UV}(u, v) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} F_{UV}(u, v) = n(n-1)(v-u)^{n-2},$$

$$0 < u \leqslant v < 1.$$

г) $F_D(x) = P(D < x) = P(V-U < x) =$

$$= \iint\limits_{v-u<x} f_{UV}(u, v)\,du dv =$$

$$= \iint\limits_{\substack{0<u<v<1 \\ v-u<x}} n(n-1)(v-u)^{n-2}\,du\,dv =$$

$$= \iint\limits_{\substack{0<u,\,w<x \\ u+w<1}} n(n-1)\,w^{n-2}\,du\,dw -$$

$$= \int\limits_0^x n(n-1)\,w^{n-2}(1-w)\,dw = nx^{n-1} -$$

$$-(n-1)x^n,\quad 0<x<1.$$

$$f_D(x) = F_D'(x) = n(n-1)(x^{n-2}-x^{n-1}),$$

$$0<x<1.$$

$$ED = EV - EU = \frac{n-1}{n+1};\quad ED^2 =$$

$$= \int\limits_0^1 n(n-1)(x^n - x^{n+1})\,dx = \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)};$$

$$\operatorname{var} D = ED^2 - (ED)^2 = \frac{2(n-1)}{(n+1)^2(n+2)}.$$

д) $\operatorname{var} D = \operatorname{var} V + \operatorname{var} U - 2\operatorname{cov}(U, V)$,

$$\operatorname{cov}(U, V) = \operatorname{var} V - \frac{1}{2}\operatorname{var} D;$$

$$\operatorname{cor}(U, V) = \frac{\operatorname{cov}(U, V)}{\operatorname{var} V} = 1 - \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{var} D}{\operatorname{var} V} = 1/n.$$

е) $P(R<x) = \int\limits_{\frac{u}{v}<x} f_{UV}(u, v)\,du\,dv =$

$$= \iint\limits_{\substack{u<vx \\ 0<u<v<1}} n(n-1)(v-u)^{n-2}\,du\,dv =$$

$$= n(n-1)\int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^{vx} (v-u)^{n-2}\,du\right] dv = n \times$$

$$\times \int\limits_0^1 [v^{n-1} - v^{n-1}(1-x)^{n-1}]\,dv = 1 - (1-x)^{n-1}$$

Б. Используем явные выражения для функций распределения, полученные в предыдущей задаче:

$$\lim_{n\to\infty} P(nU_n < x) = \lim\left[1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right] = 1-e^{-x};$$

$$\lim P\{n(1-V_n) < x\} = \lim P\{nU_n < x\};$$

$$\lim P\{n(1-D_n) < x\} = \lim P\left(D_n > 1-\frac{x}{n}\right) =$$

$$= \lim\left\{1-\left[n\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1} - (n-1)\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right]\right\} =$$

$$= 1-\lim\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1}\left[n-(n-1)\left(1-\frac{x}{n}\right)\right] =$$

$$= 1-(1+x)e^{-x};$$

$$\lim P(nR_n < x) = \lim P(nU_{n-1} < x) = 1-e^{-x}.$$

82. Совместное распределение моментов $\xi$ и $\eta$ прибытия к месту встречи лиц $A$ и $B$ имеет плотность

$$f(x, y) = 1, \quad 20 < x, y < 21.$$

Искомая вероятность есть

$$P\left(|\xi-\eta| < \frac{1}{6}\right) = \iint\limits_{\substack{|x-y|<1/6\\ 0<x,y<1}} dxdy -$$

$$= 1-2\iint\limits_{\substack{y<x-1/6\\ 0<x,y<1}} dxdy = 1-\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{11}{36}.$$

83. 1) есть частный случай 2). Для 2) и 3) применением общей формулы преобразования плотности получим соответственно

$$g(x) = \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \quad g(x) = -\frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$

оба этих случая можно записать

$$g(x) = \frac{1}{|\sigma|} f\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$

что дает 4).

5) $g(x) = (\sqrt[3]{x})' f(\sqrt[3]{x}) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2} f(\sqrt[3]{x})$.

6) $P(\eta < x) = P(-x < \xi < x) = \int\limits_{-x}^{x} f(u)\,du =$

$$= \int\limits_{0}^{x} [f(u) + f(-u)]\,du, \quad x > 0,$$

откуда $g(x) = f(x) + f(-x)$, $x > 0$, согласно определению плотности.

7) Применив общую формулу к гладкой биекции $(0, \infty) \ni x \mapsto x^2 \in (0, \infty)$ и плотности случайной величины $|\xi|$, найденной в предыдущем пункте, получим плотность сл. в. $\xi^2 = |\xi|^2$:

$$p(x) = (\sqrt{x})' [f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})] =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} [f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})], \quad x > 0.$$

**84.** Положим $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$, $\eta_2 = \xi_1/(\xi_1 + \xi_2)$. Якобиан преобразования

$$y_1 = x_1 + x_2, \qquad x_1 = y_1 y_2,$$
$$y_2 = x_1/(x_1 + x_2) \text{ или } x_2 = y_1 - y_1 y_2$$

($x_1 > 0$, $x_2 > 0$; $y_1 > 0$, $0 < y_2 < 1$) равен

$$J = \begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ 1 - y_2 & -y_1 \end{vmatrix} = -y_1;$$

поэтому

$$p_{\eta_1 \eta_2}(y_1, y_2) = ae^{-ay_1 y_2} \cdot ae^{-a(y_1 - y_1 y_2)} \cdot y_1 =$$
$$= a^2 y_1 e^{-ay_1}; \quad y_1 > 0, \quad 0 < y_2 < 1.$$

а) $p_{\eta_2}(y_2) = \int p_{\eta_1 \eta_2}(y_1, y_2)\,dy_1 = \int\limits_{0}^{\infty} \times$

$$\times a^2 y_1 e^{-ay_1} dy_1 = 1, \quad 0 < y_2 < 1.$$

б) $p_{\eta_1 \eta_2}(y_1, y_2) = [a^2 y_1 e^{-ay_1} \cdot 1_{(0, \infty)}(y_1)] \cdot [1_{(0, 1)}(y_2)]$

есть произведение функции от $y_1$ на функцию от $y_2$, что влечет независимость $\eta_1$ и $\eta_2$.

**85. Решение 1.** $\frac{1}{2}\xi_i^2$ имеет гамма-распределение $G(1/2)$, так как

$$p_{\xi_1^2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left[p_{\xi_1}(\sqrt{x}) + p_{\xi_1}(-\sqrt{x})\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x/2}, \quad x > 0;$$

$$p_{\frac{1}{2}\xi_1^2}(x) = 2p_{\xi_1^2}(2x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x}, \quad x > 0.$$

Кроме того, сл.в. $\frac{1}{2}\xi_1^2$ и $\frac{1}{2}\xi_2^2$ независимы, поэтому сл.в. $\frac{1}{2}\xi_1^2 + \frac{1}{2}\xi_2^2$ имеет гамма-распределение $G(1/2+1/2) = G(1)$, которое представляет собой экспоненциальное распределение.

**Решение 2.**

$$P(\eta < z) = \iint\limits_{\frac{1}{2}(x^2+y^2)<z} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\substack{r^2/2<z \\ 0<\varphi<2\pi}} \frac{1}{2\pi} e^{-r^2/2} r\,dr\,d\varphi = \int\limits_{r^2/2<z} e^{-r^2/2}\, d \times$$

$$\times \frac{r^2}{2} = 1 - e^{-z}, \quad z > 0,$$

где использован переход к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ с якобианом $\partial(x, y)/\partial(r, \varphi) = r$.

**Решение 3.** Положим

$$\xi_1 = R\cos\Phi,$$
$$\xi_2 = R\sin\Phi.$$

Применив к гладкой биекции областей $R^2 \setminus \{(x_1, 0) : x_1 > 0\} \to \{(r, \varphi) : 0 < \varphi < 2\pi, r > 0\}$ общую формулу преобразования плотности, получим

$$p_{R,\Phi}(r, \varphi) = p_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2)\left|\frac{\partial(x_1 x_2)}{\partial(r, \varphi)}\right| =$$

$$= \frac{r}{2\pi} e^{-r^2/2}; \quad r > 0, \ 0 < \varphi < 2\pi;$$

т. е. $R$ и $\Phi$ независимы, $\Phi$ имеет равномерное распределение в $(0, 2\pi)$; $p_R(r) = re^{-r^2/2}$, $r > 0$, откуда для $\eta = R^2/2$ получим

$$p_\eta(x) = p_\xi(\sqrt{2x})\,\frac{1}{\sqrt{2x}} = e^{-x},\ x>0.$$

86. Для $0<x<1$ имеем

$$P(\eta \leqslant x) = P\{F(\xi) \leqslant x\} = P\{\xi \leqslant F^{-1}(x)\} = \\ = F(F^{-1}(x)) = x,$$

где

$$F^{-1}(x) = \sup\{y : F(y) \leqslant x\}.$$

Проверим, что для $0<x<1$ и любого $a$

$$F(a) \leqslant x \Leftrightarrow a \leqslant F^{-1}(x).$$

Имеем

$$F(a) \leqslant x \Rightarrow a \leqslant F^{-1}(x),$$

так как $a \in \{y : F(y) \leqslant x\}$. Обратно,

$$a \leqslant F^{-1}(x) \Rightarrow F(a) \leqslant F(F^{-1}(x)) = x.$$

Проверим, что $F(F^{-1}(x)) = x$. Существует последовательность $y_n \downarrow F^{-1}(x)$, для которой $x < F(y_n)$. По непрерывности функции $F$ получим $x \leqslant F(F^{-1}(x))$. Обратно, если $F(y_n) \leqslant x$ и $y_n \uparrow F^{-1}(x)$, то $F(F^{-1}(x)) = \\ = \lim F(y_n) \leqslant x$.

87. а) Корни действительные тогда и только тогда, когда $\xi^2 - 4\eta \geqslant 0$.

$$P(\xi^2 - 4\eta \geqslant 0) = \iint\limits_{\substack{0<x,\,y<1 \\ x^2>4y}} dxdy = \int\limits_0^1 \frac{x^2}{4}\,dx = \frac{1}{12}.$$

б) $$P(V^2 \geqslant 4U) = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^{v^2/4} 2(2-1)(v-u)^{2-2}du\right] dv =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{v^2}{2}\,dv = \frac{1}{6},$$

где использован результат в) задачи 81, А.

88. Достаточно рассмотреть случай $\mu=0$, $\sigma=1$ (тогда $\sigma\xi_i+\mu$ имеет нормальное распределение $N(\mu, \sigma^2)$, причем $\max(\sigma\xi_1+\mu, \sigma\xi_2+\mu) = \sigma\max(\xi_1, \xi_2) + \\ + \mu$, $\min(\sigma\xi_1+\mu, \sigma\xi_2+\mu) = \sigma\min(\xi_1, \xi_2) + \mu$).

**Решение 1.** Так как $\min(\xi_1, \xi_2) = -\max(-\xi_1, -\xi_2)$, где случайные величины $\max(-\xi_1, -\xi_2)$ и $\max(\xi_1, \xi_2)$

одинаково распределены, то достаточно доказать, что $E\max(\xi_1, \xi_2) = 1/\sqrt{\pi}$. Имеем

$$E\max(\xi_1, \xi_2) = \iint \max(x, y) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx\,dy =$$

$$= 2 \iint\limits_{x<y} y \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} dx\,dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left( \int\limits_{x}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} dy^2 \right) dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} \left( \int\limits_{\frac{x^2}{2}}^{\infty} e^{-u} du \right) dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

**Решение 2** для $\mu=0$, $\sigma=1$. Обозначим $E\max(\xi_1, \xi_2) = a$. Имеем

$$\max(\xi_1, \xi_2) - \min(\xi_1, \xi_2) = |\xi_1 - \xi_2|,$$

$$E\min(\xi_1, \xi_2) = -E\max(-\xi_1, -\xi_2) = -a,$$

$2a = E|\xi_1 - \xi_2|$, $a = \frac{1}{\sqrt{2}} E|\xi|$, где $\xi = (\xi_1 - \xi_2)/\sqrt{2}$ имеет нормальное распределение $N(0, 1)$ (использованы независимость $\xi_1$ и $\xi_2$ и известное правило вычисления параметров нормального распределения, отвечающего сумме независимых нормально распределенных величин).

$$E|\xi| = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} d\frac{x^2}{2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}};$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

89. Занумеруем все рациональные числа в последовательность $r_1, r_2, \ldots$ и положим $P(\xi = r_n) = 2^{-n}$;

$n=1, 2, \ldots$. Тогда для любых $x$ и $\varepsilon>0$ существует $r_n\in(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ и, следовательно,

$$F(x+\varepsilon)-F(x-\varepsilon)=P(x-\varepsilon<\xi<x+\varepsilon)\geqslant$$
$$\geqslant P(\xi=r_n)=2^{-n}>0.$$

90. а) Ниже считаем $C_n^j=0$ при целых $j\in\overline{(0, 1, \ldots, n)}$. Доказательство проведем методом математической индукции. При $n=1$

$$P(\xi_1<x)=\sum_{j=0}^{[x]}(-1)^j C_1^j(x-j),$$

так как обе части доказываемого равенства равны $x$ при $0<x<1$ и равны 1 при $x\geqslant 1$. В самом деле, при $0<x<1$

$$\sum_{j=0}^{[x]}(-1)^j C_1^j(x-j)=C_1^0 x=x;$$

при $x\geqslant 1$

$$\sum_{j=0}^{[x]}(-1)^j C_1^j(x-j)=x+(-1)C_1^1(x-1)=$$
$$=x+(1-x)=1.$$

Пусть утверждение верно для $n-1$. Докажем для $n$. Обозначим $S_n=\xi_1+\ldots+\xi_n$. Имеем для $x>0$

$$P(S_n<x)=\int_0^1 P(S_{n-1}<x-y)\,dy=$$
$$=\int_0^{\min(x,1)}\frac{1}{(n-1)!}\sum_{j=0}^{[x-y]}(-1)^j C_{n-1}^j(x-y-j)^{n-1}dy.$$

Для $0<x<1$

$$P(S_n<x)=\int_0^x\frac{1}{(n-1)!}(x-y)^{n-1}dy=\frac{1}{n!}x^n-$$
$$-\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{[x]}(-1)^j C_n^j(x-j)^n.$$

Для $x\geqslant 1$

$$P(S_n < x) = \int_0^1 \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=0}^{[x-y]} (-1)^j C_{n-1}^j (x-y-j)^{n-1} dy.$$

Заметим, что

$$[x-y]=[x]-1 \Leftrightarrow [x]-1 \leqslant x-y<[x] \Leftrightarrow \{x\}<y \leqslant \{x\}+1,$$
$$[x-y]=[x] \Leftrightarrow [x] \leqslant x-y<[x]+1 \Leftrightarrow \{x\}-1<y \leqslant \{x\}.$$

Теперь

$$P(\xi_1 + \ldots \xi_n < x) = \int_0^{\{x\}} \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=0}^{[x]} (-1)^j C_{n-1}^j \times$$

$$\times (x-y-j)^{n-1} dy + \int_{\{x\}}^1 \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=0}^{[x]-1} \times$$

$$\times (-1)^j C_{n-1}^j (x-y-j)^{n-1} dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=0}^{[x]-1} (-1)^j C_{n-1}^j (x-y-j)^{n-1} dy +$$

$$+ \int_0^{\{x\}} \frac{1}{(n-1)!} (-1)^{[x]} C_{n-1}^{[x]} (\{x\}-y)^{n-1} dy =$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{[x]-1} (-1)^j C_{n-1}^j [(x-j)^n - (x-1-j)^n] +$$

$$+ \frac{1}{n!} (-1)^{[x]} C_{n-1}^{[x]} \{x\}^n = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{[x]-1} (-1)^j \times$$

$$\times (C_{n-1}^j + C_{n-1}^{j-1}) (x-j)^n + \frac{1}{n!} (-1)^{[x]} \times$$

$$\times (C_{n-1}^{[x]-1} + C_{n-1}^{[x]}) \{x\}^n = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{[x]-1} (-1)^j \times$$

$$\times C_n^j (x-j)^n + \frac{1}{n!} (-1)^{[x]} C_n^{[x]} \{x\}^n =$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{[x]} (-1)^j C_n^j (x-j)^n.$$

б) Число $\varphi_n(a_1, \ldots, a_n)$ возрастаний в последовательности различных чисел зависит только от порядка расположения точек $a_1, \ldots, a_n$ на числовой прямой, а следовательно, распределение случайной величины $\eta_n = \varphi_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — одно и то же при любом симметричном распределении случайного вектора $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, для которого компоненты различны с вероятностью 1. В формулировке задачи вектор $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ принимает в качестве значений перестановки $n$ чисел $a_1, \ldots, a_n$ с равными вероятностями $1/n!$. Для вычисления $P(\eta_n \leqslant k)$ используем другое распределение, а именно считаем $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимыми равномерно в $(0, 1)$ распределенными случайными величинами. Положим

$$f_n(z, x) = E\left(z^{\varphi_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)} \mid \xi_n = x\right) = Ez^{\varphi_n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, x)}.$$

Так как $\varphi_1(a_1) = 1$, то $f_1(z, x) = z$. При $n \geqslant 2$ имеем

$$f_n(z, x) = Ez^{\varphi_n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, x)} =$$

$$= \int_0^x Ez^{\varphi_n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-2}, y, x)}\, dy +$$

$$+ \int_x^1 Ez^{\varphi_n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-2}, y, x)}\, dy =$$

$$= \int_0^x Ez^{\varphi_{n-1}(\xi_1, \ldots, \xi_{n-2}, y)+1}\, dy +$$

$$+ \int_x^1 Ez^{\varphi_{n-1}(\xi_1, \ldots, \xi_{n-2}, y)}\, dy =$$

$$= \int_0^x z f_{n-1}(z, y)\, dy + \int_x^1 f_{n-1}(z, y)\, dy.$$

Положим при $|\alpha| < 1$

$$f(z, x, \alpha) = \sum_{n \geqslant 1} f_n(z, x)\, \alpha^n$$

(ряд сходится, так как $|f_n(z, x)| \leqslant 1$). Имеем

$$f(z, x, \alpha) - z\alpha = \sum_{n \geqslant 2} f_n(z, x)\, \alpha^n =$$

$$= \int_0^x z \sum_{n>2} f_{n-1}(z, y)\alpha^n dy +$$

$$+ \int_x^1 \sum_{n>2} f_{n-1}(z, y)\alpha^n dy = \int_0^x z\alpha f(z, y, \alpha) dy +$$

$$+ \int_x^1 \alpha f(z, y, \alpha) dy.$$

Решая полученное интегральное уравнение, получим

$$f(z, x, \alpha) = \frac{z(z-1)\alpha}{z - e^{(z-1)\alpha}} \cdot e^{(z-1)\alpha x}.$$

(Приведем решение. При фиксированных $z$, $\alpha$ для $\varphi(x) = f(z, x, \alpha)$ имеем

$$\varphi(x) = z\alpha + z\alpha \int_0^x \varphi(y) dy + \alpha \int_x^1 \varphi(y) dy,$$

откуда

$$\varphi'(x) = (z-1)\alpha\varphi(x), \quad \varphi(x) = ce^{(z-1)\alpha x};$$

константу $c$ находим, подставив $\varphi$ в интегральное уравнение

$$ce^{(z-1)\alpha x} = z\alpha + \frac{z\alpha}{(z-1)\alpha} c\left[e^{(z-1)\alpha x} - 1\right] +$$

$$+ \frac{\alpha}{(z-1)\alpha} c\left[e^{(z-1)\alpha} - e^{(z-1)\alpha x}\right],$$

$$c = \frac{z(z-1)\alpha}{z - e^{(z-1)\alpha}}\Bigg).$$

Теперь

$$f(z, \alpha) = \sum_{n>1} \left(Ez^{\eta_n}\right)\alpha^n =$$

$$= \sum_{n\geqslant 1} \alpha^n \left[\int_0^1 E\left(z^{\varphi_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)} \middle| \xi_n = x\right) dx\right] =$$

$$= \int_0^1 f(z, x, \alpha) dx = \frac{z}{z - e^{(z-1)\alpha}} \left[e^{(z-1)\alpha} - 1\right] =$$

$$= z \frac{e^{(1-z)\alpha} - 1}{1 - ze^{(1-z)\alpha}}.$$

К той же функции $f(z, \alpha)$ придем, отправляясь от ответа:

$$F_n(k) = P(\eta_n \leqslant k) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_n^j (k-j)^n;$$

$$k = 0, 1, \ldots,$$

полученного с помощью п. а). Действительно,

$$Ez^{\eta_n} = \sum_{k \geqslant 1} z^k P(\eta_n = k) = \sum_{k \geqslant 1} z^k [F_n(k) - F_n(k-1)] =$$

$$= \sum_{k \geqslant 1} z^k F_n(k) - z \sum_{k \geqslant 1} z^k F_n(k) = (1-z) \sum_{k \geqslant 1} z^k F_n(k) =$$

$$= \frac{1-z}{n!} \sum_{k \geqslant 1} z^k \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_n^j (k-j)^n =$$

$$= \frac{1-z}{n!} \left[ \sum_{k \geqslant 1} k^n z^k + \sum_{j \geqslant 1} \left( \sum_{k \geqslant j} z^{k-j} (k-j)^n (-1)^j C_n^j z^j \right] \right] =$$

$$= \frac{1-z}{n!} \sum_{k \geqslant 1} k^n z^k \left[ 1 + \sum_{j \geqslant 1} (-1)^j C_n^j z^j \right] =$$

$$= \frac{(1-z)^{n+1}}{n!} \sum_{k \geqslant 1} k^n z^k;$$

$$f(z, \alpha) = \sum_{n \geqslant 1} (Ez^{\eta_n}) \alpha^n = \sum_{n \geqslant 1} \frac{(1-z)^{n+1}}{n!} \sum_{k \geqslant 1} k^n z^k \alpha^n =$$

$$= \sum_{k \geqslant 1} (1-z) z^k \sum_{n \geqslant 1} \frac{[(1-z)k\alpha]^n}{n!} = \sum_{k \geqslant 1} (1-z) z^k \times$$

$$\times [e^{(1-z)k\alpha} - 1] = \sum_{k \geqslant 0} (1-z) [ze^{(1-z)\alpha}]^k -$$

$$- \sum_{k \geqslant 0} (1-z) z^k = \frac{1-z}{1-ze^{(1-z)\alpha}} - 1 =$$

$$= z \frac{e^{(1-z)\alpha} - 1}{1 - ze^{(1-z)\alpha}}.$$

Функция $f(z, \alpha)$ однозначно определяет как $P(\eta_n \leqslant k)$, так и

$$P(\xi_1 + \ldots + \xi_n < k) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_n^j (k-j)^n$$

(двойная производящая функция), что доказывает равенство

$$P(\eta_n \leqslant k) = P(\xi_1 + \ldots + \xi_n < k).$$

## § 2. МНОГОМЕРНОЕ НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Рассмотрим векторную сл.в. $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_r)$ такую, что действительные сл.в. $\xi_1, \ldots, \xi_r$ независимы и одинаково распределены по нормальному закону $N(0, 1)$. Для элементов

$$x = (x_1, \ldots, x_r) \text{ и } y = (y_1, \ldots, y_r)$$

из $R^r$ неравенство $x < y$ по определению равносильно системе неравенств

$$x_1 < y_1, \ldots, x_r < y_r.$$

Тогда ф.р. векторной сл.в. $\xi$ равна

$$\Phi(x) = P(\xi < x) = P\left\{\prod_1^r (\xi_k < x_k)\right\} =$$

$$= \prod_1^r P(\xi_k < x_k) = \prod_1^r \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_k} e^{-u_k^2/2}\, du_k =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{r}{2}} \int_{u_1 < x_1} \ldots \int_{u_r < x_r} e^{-\frac{1}{2}\left(u_1^2 + \ldots + u_r^2\right)} du_1 \ldots du_r =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{r}{2}} \int_{u < x} e^{-\frac{1}{2}(u, u)}\, du.$$

Плотность распределения равна

$$f(x) = \frac{\partial^r}{\partial x_1 \ldots \partial x_r} \Phi(x) = (2\pi)^{-\frac{r}{2}} \exp \times$$

$$\times \left\{-\frac{1}{2}(x, x)\right\}, \quad x \in R^r.$$

Х.ф. векторной сл.в. $\xi$ равна

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{i(t,\xi)} = Ee^{it_1\xi_1} \dots Ee^{it_r\xi_r} =$$

$$= e^{-\frac{t_1^2}{2}} \dots e^{-\frac{t_r^2}{2}} = \exp\left\{-\frac{1}{2}(t,t)\right\}.$$

Пусть $\sigma$ — произвольная действительная невырожденная матрица размерности $r \times r$ и $\mu$ — некоторый фиксированный вектор из $R^r$. Будем представлять векторы из $R^r$ как векторы-столбцы. Найдем распределение векторной сл.в.

$$\eta = \sigma\xi + \mu.$$

Отметим предварительно одно общее утверждение. Если векторная сл.в. $\xi$ имеет плотность распределения $f(x)$, то векторная сл.в. $\eta$ имеет плотность распределения $g(x)$, которая определяется равенством

$$g(x) = |\det \sigma^{-1}| \cdot f[\sigma^{-1}(x-\mu)].$$

Более общим является часто используемое утверждение: пусть сл.в. $\xi$ имеет плотность распределения $f(x)$, равную нулю вне открытого множества $U$ в $R^r$, $\varphi$ — биекция $U$ на открытое множество $V$ в $R^r$ такая, что как $\varphi$, так и обратная функция $\varphi^{-1}$ непрерывно дифференцируемы. Тогда сл.в. $\eta = \varphi(\xi)$ имеет плотность распределения $g(y)$, равную нулю вне множества $V$, а на $V$

$$g(y) = |\partial x/\partial y| f(\varphi^{-1}(y)),$$

где $|\partial x/\partial y|$ обозначает модуль якобиана функции $\varphi^{-1}$.

В данном случае

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{r}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x, x)\right\}$$

и, значит,

$$g(x) = (2\pi)^{-\frac{r}{2}} |\det \sigma^{-1}| \exp\left\{-\frac{1}{2}(\sigma^{-1}(x-\mu),\right.$$

$$\left.\sigma^{-1}(x-\mu)\right\} = (2\pi)^{-\frac{r}{2}} |A|^{-\frac{1}{2}} \exp \times$$

$$\times\left\{-\frac{1}{2}\left(A^{-1}(x-\mu), x-\mu\right)\right\};$$

здесь $A=\sigma\sigma'$ есть положительно определенная матрица ($\sigma'$ —матрица, транспонированная относительно $\sigma$), $|A|=\det A$.

Распределение с такой плотностью $g(x)$ на $R^r$ называется **многомерным нормальным распределением** и обозначается $N_r(\mu, A)$.

Отметим, что если бы вместо $\sigma$ мы взяли матрицу $\sigma_1=\sigma H$, где $H$ — ортогональная матрица, то распределение для сл. вектора

$$\eta_1=\sigma_1\xi+\mu$$

от этого не изменилось бы, так как

$$A_1=\sigma_1\sigma_1'=\sigma HH'\sigma'=\sigma\sigma'=A.$$

Геометрически это означает, что если бы над сл. вектором, имеющим многомерное нормальное распределение $N_r(0, I)$, мы совершили бы преобразование типа вращения или симметрии, то полученный сл. вектор имел бы то же самое нормальное распределение.

Найдем х.ф. сл. вектора $\eta$. Имеем

$$\varphi_\eta(t)=Ee^{i(t,\eta)}=E\exp\{i(t,\sigma\xi)+i(t,\mu)\}=$$

$$=e^{i(t,\mu)}Ee^{i(\sigma't,\xi)}=e^{i(t,\mu)}\varphi_\xi(\sigma't),$$

и, окончательно,

$$\varphi(t)=\exp\left\{i(t,\mu)-\frac{1}{2}(\sigma't,\sigma't)\right\}=$$

$$=\exp\left\{i(t,\mu)-\frac{1}{2}(At,t)\right\}.$$

Выясним смысл параметров $\mu$ и $A$, определяющих нормальное распределение $N_r(\mu, A)$ сл.в. $\eta$. Так как $E\xi=0$, где

$$E\xi=(E\xi_1, \ldots, E\xi_r)',$$

то $E\eta=\mu$.

Представляя вновь векторы из $R^r$ как векторы-столбцы и используя знак $'$ взятия транспонирования, из $\eta=\sigma\xi+\mu$ имеем

$$(\eta-\mu)(\eta-\mu)'=\sigma\xi\cdot(\sigma\xi)'=\sigma(\xi\xi')\sigma',$$

и так как $E\xi\xi'=I$, где $I$ — единичная матрица, то окончательно получаем

$$\mu=E\eta,$$

$$A=\sigma\sigma'=E(\eta-\mu)(\eta-\mu)'.$$

Вектор $\mu$ называется **вектором средних значений.** Так как матрица $A$ представляется в виде

$$A=\{\operatorname{cov}(\eta_i, \eta_j)\},$$

где

$$\operatorname{cov}(\eta_i, \eta_j)=E(\eta_i-\mu_i)(\eta_j-\mu_j),$$

то матрица $A$ называется **матрицей ковариаций,** или **ковариационной матрицей.**

Предположим, что векторные сл. в. $\xi_1$ и $\xi_2$ независимы и имеют распределения $N_r(\mu_1, A_1)$ и $N_r(\mu_2, A_2)$ соответственно. Тогда векторная сл. в. $\xi=\xi_1+\xi_2$ имеет нормальное распределение $N_r(\mu, A)$, где

$$\mu=\mu_1+\mu_2, \quad A=A_1+A_2.$$

Пусть сл.в. $\xi$ имеет распределение $N_r(\mu, A)$ и $C$ — действительная прямоугольная матрица размерности $k\times r$ и ранга $k\leqslant r$. Тогда сл.в. $\eta=C\xi$ имеет распределение $N_k(C\mu, CAC')$.

### ЗАДАЧИ 91—100

**91.** Пусть сл.в. $\xi_1$ и $\xi_2$ имеют совместное нормальное распределение. Показать, что сл. в. $\xi_1$ и $\xi_2$ независимы, если и только если $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)=0$.

**92.** Пусть сл.в. $\xi$ и $\eta$ независимы и одинаково распределены по нормальному закону. Показать, что сл.в. $\xi+\eta$ и $\xi-\eta$ независимы.

**93.** Пусть сл.в. $\xi_1, \ldots, \xi_r$ имеют совместное нормальное распределение $N_r(\mu, A)$. Показать, что сл.в.

$$\xi=\sum_1^r a_i\xi_i \text{ и } \eta=\sum_1^r b_j\xi_j$$

независимы, если и только если $(Aa, b)=0$, где

$$a=(a_1, \ldots, a_r), \quad b=(b_1, \ldots, b_r).$$

В частности, если к тому же сл.в. $\xi_1, \ldots, \xi_r$ независимы и одинаково распределены (по нормальному закону), то независимость сл.в. $\xi$ и $\eta$ равносильна тому, что

$$(a, b)=\sum_1^r a_ib_i=0.$$

94. Пусть сл. вектор $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ имеет нормальное распределение $N_r(\mu, A)$. Положим

$$\rho_{ij}=\operatorname{cor}(\xi_i, \xi_j), \quad R=\{\rho_{ij}\}, \quad A=\{a_{ij}\}.$$

Показать, что:

$$\text{а) } \rho_{ij}=\frac{a_{ij}}{\sqrt{a_{ii}a_{jj}}};$$

$$\text{б) } R=\Sigma^{-1}A\Sigma^{-1}, \text{ где}$$

$$\Sigma=\left[\begin{array}{cc|c} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \sigma_r \end{array}\right]; \quad \sigma_i>0, \ \sigma_i^2=\operatorname{var}\xi_i=a_{ii}.$$

95. Пусть $f_1$ и $f_2$ — две плотности двумерных нормальных распределений с нулевыми математическими ожиданиями, единичными дисперсиями, но разными коэффициентами корреляции. Доказать, что:

а) функция $\frac{1}{2}(f_1+f_2)$ есть плотность распределения некоторого сл. вектора $(\xi_1, \xi_2)$;

б) распределение вектора $(\xi_1, \xi_2)$ не является нормальным;

в) каждая из величин $\xi_1$ и $\xi_2$ имеет нормальное распределение $N(0, 1)$.

96. Пусть сл. вектор $(\xi_1, \xi_2)$ имеет нормальное распределение, $E\xi_1=E\xi_2=0$, $\operatorname{var}\xi_1=\operatorname{var}\xi_2=1$, $E\xi_1\xi_2=\rho$. Показать, что

$$P(\xi_1\xi_2>0)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\rho; \quad P(\xi_1\xi_2<0)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\arccos\rho.$$

97. (Продолжение.) Доказать, что

$$E\max(\xi_1, \xi_2)=\left(\frac{1-\rho}{\pi}\right)^{1/2}.$$

98. Пусть сл. вектор $(\xi, \eta)$ имеет нормальное распределение, $E\xi=E\eta=0$, $E\xi\eta<0$. Показать, что

$$P(\xi>a, \ \eta>b)<P(\xi>a)\cdot P(\eta>b) \text{ при } a>0, \ b>0.$$

99. Пусть сл.в. $\xi_1$ и $\xi_2$ независимы и равномерно распределены в (0, 1). Показать, что сл.в.

$$\eta_1 = \rho\cos\varphi \text{ и } \eta_2 = \rho\sin\varphi, \text{ где } \rho = \sqrt{-2\ln\xi_1},$$
$$\varphi = 2\pi\xi_2,$$

независимы и каждая имеет нормальное распределение $N(0, 1)$.

**100.** Пусть сл.в. $\xi_1$ и $\xi_2$ независимы и имеют нормальные распределения $N(0, \sigma_1^2)$ и $N(0, \sigma_2^2)$ соответственно. Показать, что сл.в.

$$\xi = \frac{\xi_1\xi_2}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}$$

имеет нормальное распределение $N(0, \sigma^2)$, где

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2}.$$

## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 91—100

**91.** Независимые случайные величины с конечными вторыми моментами всегда некоррелированы. В случае нормального совместного распределения верно и обратное утверждение. Действительно,

$$P_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\} = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \times \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_2-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},$$

есть произведение функции от $x_1$ и функции от $x_2$, что влечет независимость $\xi_1$ и $\xi_2$.

**92.** В силу результата предыдущей задачи достаточно показать некоррелированность. Имеем

$$\operatorname{cov}(\xi+\eta, \xi-\eta) = \operatorname{cov}(\xi, \xi) - \operatorname{cov}(\xi, \eta) + \operatorname{cov}(\eta, \xi) - \operatorname{cov}(\eta, \eta) = \operatorname{var}\xi - \operatorname{var}\eta = 0.$$

**93.** Опять воспользуемся результатом задачи 91. Имеем

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \sum_{i,j} a_i b_j a_{ij} = (a, Ab) = (Aa, b).$$

Если величины $\xi_1, \ldots, \xi_r$ независимы и одинаково распределены, то

$$a_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j, \quad a_{ii} = \sigma^2, \quad (Aa, b)_i = \\ = \sigma^2 \sum_l a_l b_l = \sigma^2 \cdot (a, b).$$

Следовательно, в общем случае независимость равносильна равенству $(Aa, b) = 0$, а в рассматриваемом частном случае — равенству $(a, b) = 0$.

94. а) Следует из определения коэффициента корреляции и известных равенств $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = a_{ij}$.

б)

$$\Sigma^{-1} A \Sigma^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \sigma_1^{-1} & 0 \\ \hline 0 & \sigma_r^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & a_{1r} \\ \hline a_{r1} & a_{rr} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \sigma_1^{-1} & 0 \\ \hline 0 & \sigma_r^{-1} \end{array}\right] = \\ = \left[\begin{array}{c|c} a_{11}\sigma_1^{-1}\sigma_1^{-1} & a_{1r}\sigma_1^{-1}\sigma_r^{-1} \\ \hline a_{r1}\sigma_r^{-1}\sigma_1^{-1} & a_{rr}\sigma_r^{-1}\sigma_r^{-1} \end{array}\right] = R.$$

95. а) $f = (f_1 + f_2)/2 \geqslant 0$; $\iint f dx_1 dx_2 =$

$$= \frac{1}{2}\left(\iint f_1 dx_1 dx_2 + \iint f_2 dx_1 dx_2\right) = 1.$$

б) Заметим, что моменты $m_{ij} = \iint x_1^i x_2^j f dx_1 dx_2$ связаны с моментами $m_{ij}^{(\alpha)} = \iint x_1^i x_2^j f_\alpha dx_1 dx_2$, $\alpha = 1, 2$, равенствами

$$m_{ij} = \frac{1}{2}\left(m_{ij}^{(1)} + m_{ij}^{(2)}\right).$$

Следовательно, средние, дисперсия и ковариация плотности $f$ равны

$$m_{1,0} = m_{0,1} = 0; \quad m_{2,0} = m_{0,2} = 1;$$

$$m_{1,1} = \rho = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2),$$

где $\rho_\alpha$ — коэффициент корреляции плотности $f_\alpha$.

Если $f$ — двумерная нормальная плотность, то необходимо $f$ имеет нулевые средние, единичные дисперсии и коэффициент корреляции $\rho$. Ниже покажем, что для такой плотности

$$m_{2,2} = 1 + 2\rho^2.$$

Аналогично,

$$m_{2,2}^{(\alpha)} = 1 + 2\rho_\alpha^2; \quad \alpha = 1, 2.$$

Теперь

$$0 = \frac{1}{2}\left(m_{22}^{(1)} + m_{22}^{(2)}\right) - m_{22} = \rho_1^2 + \rho_2^2 -$$

$$-2\left[\frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)\right]^2 = \frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_2)^2 > 0 \text{ при } \rho_1 \neq \rho_2.$$

Полученное противоречие опровергает предположение о нормальности плотности $f$.

Приведем два способа вычисления $m_{22}$ для нормальной плотности.

1-й способ. Характеристическая функция

$$\varphi(t_1, t_2) = Ee^{i(t_1\xi_1 + t_2\xi_2)} = e^{-\frac{1}{2}\left(t_1^2 + 2\rho t_1 t_2 + t_2^2\right)} =$$

$$= \sum_{n>0} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot 2^{-n}\left(t_1^2 + 2\rho t_1 t_2 + t_2^2\right)^n$$

разлагается в степенной ряд по переменным $t_1$, $t_2$; коэффициент при $t_1^2 t_2^2$ равен (он возникает только при $n=2$) $\frac{1}{4}(1 + 2\rho^2)$. С другой стороны, кратная формула Тейлора

$$\varphi(t_1, t_2) = \varphi(0, 0) + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \varphi}{\partial t_i}(0, 0)\, t_i +$$

$$+ \frac{1}{2!} \sum_{i, j=1}^{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_i \partial t_j}(0, 0)\, t_i t_j +$$

$$+ \frac{1}{3!} \sum_{i, j, k=1}^{2} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t_i \partial t_j \partial t_k}(0, 0)\, t_i t_j t_k +$$

$$+ \frac{1}{4!} \sum_{i, j, k, l=1}^{2} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial t_i \partial t_j \partial t_k \partial t_l}(0, 0)\, t_i t_j t_k t_l + \ldots$$

дает коэффициент при $t_1^2 t_2^2$ в виде (возможные совпадения в произведении $t_i t_j t_k t_l$, приводящие к $t^2 t^2$ есть $(i, j, k, l) = (1, 1, 2, 2) = (1, 2, 1, 2) = (1, 2, 2, 1)$,

и также все наборы, получающиеся из этих при замене $1 \leftrightarrow 2$):

$$\frac{1}{4!} \cdot 6 \cdot \frac{\partial^4 \varphi}{\partial t_1^2 \partial t_2^2}(0, 0).$$

Сравнение коэффициентов при $t_1^2 t_2^2$ с учетом

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial t_1^2 \partial t_2^2}(0, 0) = i^4 E \xi_1^2 \xi_2^2 = m_{22}$$

приводит к $m_{22} = 1 + 2\rho^2$.

2-й способ. Заметим, что случайные величины

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{1+\rho}{2}}\,\eta_1 + \sqrt{\frac{1-\rho}{2}}\,\eta_2,$$

$$\xi_2 = \sqrt{\frac{1+\rho}{2}}\,\eta_1 - \sqrt{\frac{1-\rho}{2}}\,\eta_2,$$

где $\eta_1$ и $\eta_2$ — независимые нормально распределенные случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями, имеют совместное нормальное распределение с нулевыми математическими ожиданиями, единичными дисперсиями и коэффициентом корреляции $\rho$. Теперь

$$m_{22} = E\xi_1^2\xi_2^2 = E(\xi_1\xi_2)^2 = E\left(\frac{1+\rho}{2}\eta_1^2 - \frac{1-\rho}{2}\eta_2^2\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4} E\left[(1+\rho)^2 \eta_1^4 - 2(1-\rho^2)\eta_1^2\eta_2^2 + (1-\rho)^2 \eta_2^4\right] =$$

$$= \frac{3}{4}\left[(1+\rho)^2 + (1-\rho)^2\right] - \frac{2}{4}(1-\rho^2) = 1 + 2\rho^2,$$

где использовано, что $E\eta_1^4 = 3$ (общая формула $E\eta_1^{2n} = (2n-1)!!$ просто получается нахождением коэффициента при $t^{2n}$ разложения характеристической функции $f(t) = e^{-t^2/2}$ стандартного нормального распределения в степенной ряд).

в) Например,

$$p_{\xi_1}(x_1) = \int f(x_1, x_2)\,dx_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int f_1(x_1, x_2)\,dx_2 + \int f_2(x_1, x_2)\,dx_2\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_1^2/2}$$

**96.**

$$P(\xi_1\xi_2<0)=\iint\limits_{x_1x_2<0}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\times$$

$$\times\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x_1^2-2\rho x_1x_2+x_2^2)\right\}dx_1dx_2=$$

$$=\int\limits_{\Delta}\left(\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(r^2-r^2\rho\sin 2\varphi)\right\}rdr\right)d\varphi,$$

где $\Delta=(\pi/2,\ \pi)\cup(3\pi/2,\ 2\pi)$ и использован переход к полярным координатам: $x_1=r\cos\varphi$, $x_2=r\sin\varphi$. Вычислив внутренний интеграл, получим

$$P\ (\xi_1\xi_2<0)=\int\limits_{2\Delta}\frac{(1-\rho^2)\,d\alpha}{4\pi\sqrt{1-\rho^2}(1-\rho\sin\alpha)}=$$

$$=\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\alpha}{1+\rho\sin\alpha}=\frac{1}{\pi}\arccos\rho,$$

где использован интеграл

$$\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\alpha}{1+\rho\sin\alpha}=\frac{\arccos\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}.$$

$$P(\xi_1\xi_2>0)=1-P(\xi_1\xi_2<0)=$$

$$=1-\frac{1}{\pi}\arccos\rho=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\rho.$$

**97.** Положим $f(\rho)=E\max(\xi_1,\ \xi_2)$. Случайные векторы $(\xi_1,\ \xi_2)$ и $(-\xi_1,\ -\xi_2)$ одинаково распределены (нормально с нулевыми математическими ожиданиями, единичными дисперсиями и коэффициентом корреляции $\rho$). Следовательно,

$$E\min(\xi_1,\ \xi_2)=-E\max(-\xi_1,\ -\xi_2)=-f(\rho).$$

Так как $\max(\xi_1,\ \xi_2)-\min(\xi_1,\ \xi_2)=|\xi_1-\xi_2|$, то

$2f(\rho)=E\max(\xi_1,\ \xi_2)-E\ \min(\xi_1,\ \xi_2)=E|\xi_1-\xi_2|=E|\xi|$,

где

$$\xi=\xi_1-\xi_2\sim N(0,2(1-\rho))$$

$$[\operatorname{var}\xi=\operatorname{var}\xi_1-2\operatorname{cov}(\xi_1,\ \xi_2)+\operatorname{var}\xi_2=2(1-\rho)],$$

$$2f(\rho) = 2\int_0^\infty x \frac{1}{2\sqrt{(1-\rho)\pi}} e^{-\frac{x^2}{4(1-\rho)}} dx,$$

$$f(\rho) = \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{(1-\rho)\pi}} e^{-\frac{x^2}{4(1-\rho)}} dx^2 =$$

$$= \frac{4(1-\rho)}{4\sqrt{(1-\rho)\pi}} = \left(\frac{1-\rho}{\pi}\right)^{1/2}.$$

98. Можно считать дисперсии $\sigma_1^2$ и $\sigma_2^2$ величин $\xi$ и $\eta$ равными 1 (иначе берем $\xi/\sigma_1$, $a/\sigma_1$, $\eta/\sigma_2$, $b/\sigma_2$ вместо $\xi$, $a$, $\eta$, $b$, что приводит к единичным дисперсиям). В этом случае условное распределение величины $\eta$ при $\xi = x$ есть $N(\rho x, 1-\rho^2)$. Обозначим $\Phi$ функцию распределения $N(0, 1)$, $p$ — плотность распределения $N(0, 1)$.

$$P(\xi \geqslant a,\ \eta \geqslant b) = \int_a^\infty P(\eta \geqslant b \mid \xi = x)\, p(x)\, dx =$$

$$= \int_a^\infty \left[1 - \Phi\left(\frac{b-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\right] p(x)\, dx.$$

Покажем, что

$$1 - \Phi\left(\frac{b-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \leqslant 1 - \Phi(b)\ \ \forall\, x \geqslant a.$$

В самом деле,

$$1 - \Phi\left(\frac{b-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \leqslant 1 - \Phi(b) \Leftrightarrow \frac{b-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}} \geqslant$$

$$\geqslant b \Leftrightarrow b(1 - \sqrt{1-\rho^2}) \geqslant \rho x,$$

последнее неравенство верно, так как

$$b(1 - \sqrt{1-\rho^2}) \geqslant 0,\ \rho < 0,\ x \geqslant a > 0.$$

Теперь

$$P(\xi \geqslant a,\ \eta \geqslant b) \leqslant \int_a^\infty [1 - \Phi(b)]\, p(x)\, dx =$$

$$= [1 - \Phi(a)][1 - \Phi(b)] = P(\xi \geqslant a) \cdot P(\xi \geqslant b).$$

99. Якобиан $J$ гладкой биекции

$$X = (0, 1)^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto (\rho, \varphi) \mapsto (y_1, y_2) \in$$
$$\in R^2 \setminus \{(y_1, 0) : y_1 \geqslant 0\} = Y,$$
$$y_1 = \rho \cos \varphi, \quad \rho = \sqrt{-2 \ln x_1},$$
$$y_2 = \rho \sin \varphi, \quad \varphi = 2\pi x_2$$

(открытого множества плоскости в открытое множество плоскости) определяется из

$$J^{-1} = \left| \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} \right| = \left| \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(\rho, \varphi)} \right| \cdot \left| \frac{\partial(\rho, \varphi)}{\partial(x_1, x_2)} \right|.$$

Так как

$$\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(\rho, \varphi)} = \rho, \quad \frac{\partial(\rho, \varphi)}{\partial(x_1, x_2)} =$$
$$= \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{x_1 \sqrt{-2 \ln x_1}} & 0 \\ 0 & 2\pi \end{vmatrix} = -\frac{2\pi}{x_1 \rho},$$

то

$$J^{-1} = \frac{2\pi}{x_1}, \quad J = \frac{x_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} e^{-\rho^2/2} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{y_1^2 + y_2^2}{2}}.$$

Поэтому плотность распределения сл. в. $(\eta_1, \eta_2)$ равна

$$J \cdot 1_X(x_1, x_2) = J \cdot 1_Y(y_1, y_2),$$

что почти всюду совпадает с

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_1^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_2^2}{2}}.$$

100. Заметим, что

$$\frac{1}{\xi^2} = \frac{1}{\xi_1^2} + \frac{1}{\xi_2^2}$$

и что случайные величины $\xi$ и $-\xi$ одинаково распределены. Используя результат задачи 83, получим

$$p_{\xi_j^2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sigma_j \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2\sigma_j^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sigma_j \sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2\sigma_j^2}}, \quad x > 0,$$

откуда

$$p_{1/\xi_j^2}(x) = \frac{1}{\sigma_j x^{3/2} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_j^2 x}}, \quad x > 0.$$

Преобразование Лапласа такой плотности известно и равно

$$Ee^{-\lambda \frac{1}{\xi_j^2}} = \int_0^\infty e^{-\lambda x} p_{1/\xi_j^2}(x)\, dx = e^{-\sqrt{2\lambda}/\sigma_j}, \quad \lambda > 0.$$

Преобразование Лапласа плотности $p_{1/\xi^2}$ равно произведению преобразований Лапласа плотностей $p_{1/\xi_1^2}$ и $p_{1/\xi_2^2}$:

$$Ee^{-\lambda \frac{1}{\xi^2}} = \int_0^\infty e^{-\lambda x} p_{1/\xi^2}(x)\, dx = e^{-\sqrt{2\lambda}/\sigma}, \quad \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2}.$$

Следовательно,

$$p_{1/\xi^2}(x) = \frac{1}{\sigma x^{3/2} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 x}}, \quad x > 0;$$

$$p_{\xi^2}(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}, \quad x > 0;$$

$$p_{|\xi|}(x) = \frac{2}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad x > 0;$$

$$p_\xi(x) = \frac{1}{2} p_{|\xi|}(|x|) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty,$$

т. е. $\xi$ имеет нормальное распределение $N(0, \sigma^2)$.

## Ответы к задачам ч. 1

**4.** 1/3. **5.** 1/12; 11/36; 1/18. **6.** 4/9. **7.** 11/36; 6/11. **8.** $A = A_1A_2A_3$; $B = A_1^cA_2^cA_3^c$; $C = A_1A_2^cA_3^c + A_1^cA_2A_3^c + A_1^cA_2^cA_3$; $D = (B \cup C)^c$. **9.** $B_m = A_1^c \ldots A_{m-1}^cA_m$; $\bigcup\limits_{n\geqslant 1} B_n = \bigcup\limits_{n\geqslant 1} A_n$. **10.** 3/5. **11.** 2/3. **12.** $P_A(A_i) = 1/3$; $P_B(A_1) = P_B(A_2) = \dfrac{1}{1+q}$; $P_B(A_3) = 1$. **13.** 5/14; 5/14; 2/7; $2^{-(n-1)}$. **15.** 30/49. **16.** $2/n$; $\dfrac{2(n-r-1)}{n(n-1)}$. **23.** $p_n = [1 + (p-q)^n]/2$, $q_n = [1 - (p-q)^n]/2$. **27.** 1. **28.** $\sum\limits_{i\geqslant 1} p_iq_i$. **30.** $2^{-2n}C_{2n}^n$. **36.** $2^{-n/2}\sin\dfrac{n\pi}{4}$. **40.** $(1 - e^{-\lambda})/\lambda$. **41.** $q = q_1q_2$. **42.** $\left[\left(1 + \dfrac{1}{\mu}\right)^N - 1\right]^{-1}$. **44.** $P(U = k) = [2(N - k) + 1]/N^2$; $P(V = k) = (2k-1)/N^2$; $P(D = 0) = 1/N$; $P(D = k) = 2(N-k)/N^2$, $k = \overline{1, N}$. **45.** $2npq$; $4npq(1 - 3pq) - 2pq(1 - 4pq)$. **47.** $\dfrac{n-1}{2n^2}$; $\dfrac{n-1}{2n^2}$; $\dfrac{1}{2n} + \dfrac{1-(-1)^n}{4n^2}$. **48.** $p(z)q^Nz^N + (1 - q^N)z^N$; $p(z)(1 - q^Nz^N) + q^Nz^N$, где $p(z) = p/(1-qz)$. **49.** $[p(z)p + q]^n$. **50.** $\exp(\lambda[z_1(pz_2 + q) - 1])$; $\sqrt{p}$. **51.** $E\xi = n(n-1)/4$; $\operatorname{var}\xi = n(n-1)(2n+5)/72$. **54.** $P(\bigcup\limits_1^n A_k) = S_1 - S_2 + \ldots (-1)^{n+1}S_n$. **61.** Является. **64.** $\{A, A^c, \varnothing, \Omega\}$. **82.** 11/36. **83.** $\dfrac{1}{\sigma}f\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$; $-\dfrac{1}{\sigma}f\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$; $\dfrac{1}{|\sigma|}f\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$; $\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{x^2}f(\sqrt[3]{x})$; $f(x) + f(-x)$ при $x > 0$; $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}[f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})]$ при $x > 0$. **87.** 1/12; 1/6.

# Часть 2. ПРОЦЕССЫ

## *Введение*

Типичные случайные процессы — это количество атмосферных осадков, уровень воды в реке, температура воздуха в зависимости от места и времени; это число судов, ожидающих разгрузку, время ожидания начала обслуживания последнего в очереди, число занятых линий связи в зависимости от времени; это скорость течения воды в океане в зависимости от глубины, места и времени.

Набор $\xi=\{\xi(t):t\in T\}$ сл. в. $\xi(t)$, определенных на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, S, P)$, называется **случайной функцией.** Если параметр $t$ играет роль времени, т. е. $T\subset R^1$, то чаще такую случайную функцию называют **случайным процессом.** Если же $T\subset\{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ или $T$ есть упорядоченное счетное множество, то говорят еще о **случайной последовательности.**

Таким образом, сл. функция $\xi$ есть отображение $(t, \omega)\mapsto\xi(t, \omega)$, измеримое по второму аргументу.

Например, $\xi(t)$ может быть рядом Фурье или многочленом по $t$ со случайными коэффициентами. Последовательность $\{\xi_k:k=1, 2, ...\}$ сл. в. есть тоже сл. процесс (если положить $T=\{1, 2, ...\}$ и $\xi(t)=\xi_t$ для $t\in T$).

При фиксированном $\omega\in\Omega$ функция $\xi(t, \omega)$ от $t$ называется (выборочной) траекторией (функцией) процесса $\xi$. Оказывается, что на множестве всех траекторий можно ввести $\sigma$-алгебру подмножеств и вероятностную меру такие, что в построенном вероятностном пространстве траектории становятся элементарными событиями.

Два процесса $\xi=\{\xi(t):t\in T\}$ и $\eta=\{\eta(t):t\in T\}$, определенные на одном и том же вероятностном прост-

ранстве $(\Omega, S, P)$, называются (стохастически) **эквивалентными в широком смысле**, если

$$P\{\xi(t_1)\in B_1, \ldots, \xi(t_n)\in B_n\} = \\ = P\{\eta(t_1)\in B_1, \ldots, \eta(t_n)\in B_n\}$$

для всякого целого числа $n\geqslant 1$, $t_k\in T$ и $B_k\in S$ при $k=1, \ldots, n$. В этом случае говорят еще, что процессы $\xi$ и $\eta$ имеют одинаковые конечномерные распределения.

## § 1. ТЕОРЕМА КОЛМОГОРОВА О ПОСТРОЕНИИ ПРОЦЕССА ПО ЧАСТНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМ. МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ СО СЧЕТНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ

Приводимая ниже теорема А. Н. Колмогорова означает, что по семейству конечномерных распределений, согласованных естественным образом, можно построить случайный процесс, имеющий те же самые конечномерные распределения.

Пусть $T$ — некоторое множество и $(X_t, d_t)$ для $t\in T$ есть метрическое пространство с метрикой $d_t$. Прямое произведение конечного числа метрических пространств $(X_t, d_t)$, $t\in M$, есть метрическое пространство $(X_M, d_M)$, где

$$X_M = \prod_{t\in M} X_t, \quad d_M = \max_{t\in M} d_t.$$

Через $\mathbf{B}_M$ обозначим $\sigma$-алгебру борелевских множеств пространства $X_M$.

Предположим, что для каждого конечного множества $M\subset T$ задана вероятностная мера $P_M$ на $(X_M, \mathbf{B}_M)$, и рассмотрим **условие согласованности** (семейства мер $P_M$, $M\subset T$ и $|M|<\infty$):

$$P_M(A\times X_{M\setminus N}) = P_N(A) \text{ для } N\subset M,\ A\in\mathbf{B}_N.$$

В этом случае мера $P_N$ называется проекцией меры $P_M$ на $(X_N, \mathbf{B}_N)$.

Определим еще измеримое пространство $(X_T, \mathbf{B}_T)$, в котором $X_T = \prod_{t\in T} X_t$; при этом для конечного множества $M\subset T$ и $A\in\mathbf{B}_M$ множество $A\times X_{T\setminus M}\subset X_T$ на-

зывается **цилиндром** (с основанием $A$), а $\mathbf{B}_T$ есть наименьшая $\sigma$-алгебра, содержащая все цилиндры.

**Теорема Колмогорова.** Пусть $X_t$ для каждого $t\in T$ есть польское пространство (полное сепарабельное метрическое пространство) и задано семейство вероятностных мер $P_M$ на $(X_M, \mathbf{B}_M)$ по конечным множествам $M\subset T$, удовлетворяющее условию согласованности. Тогда существует единственная вероятностная мера $P$ на $(X_T, \mathbf{B}_T)$, проекция которой на $(X_M, \mathbf{B}_M)$ совпадает с $P_M$ для всякого множества $M\subset T$, т. е.

$$P(A\times X_{T\setminus M}) = P_M(A) \text{ для всех } A\in\mathbf{B}_M.$$

**Следствие.** Предположим, что выполнены условия теоремы. Тогда существует случайный процесс $\xi=\{\xi(t): t\in T\}$ такой, что:

1) сл. в. $\xi(t)$ для всякого $t\in T$ принимает значения в $X_t$;

2) для всякого конечного набора $M=\{t_1, ..., t_n\}\subset T$

$$P\{\xi(t_1)\in B_1, ..., \xi(t_n)\in B_n\} = P_M(B)$$

для всех

$$B = B_1\times ...\times B_n\in\mathbf{B}_M, \text{ где } B_k\in B_{t_k}$$

(т. е. конечномерные распределения процесса $\xi$ совпадают с соответствующими вероятностными мерами заданного согласованного семейства мер).

Действительно, достаточно положить

$$\xi(t, \omega) = \omega(t) \text{ для } t\in T,\ \omega\in X_T,$$

так как $\omega=\{\omega(t): t\in T\}\in X_T$ и

$$P\{\xi(t_1)\in B_1, ..., \xi(t_n)\in B_n\} = P\{\omega: \xi(t_k, \omega)\in B_k;$$

$$k=1, ..., n\} = P\{\omega: \omega(t_k)\in B_k;\ k=1, ..., n\} =$$

$$= P\{\omega\in X_T : \omega\in B\times X_{T\setminus M}\} = P(B\times X_{T\setminus M}) = P_M(B).$$

**Замечание 1.** Аналогично тому как были определены измеримое пространство $(X_T, \mathbf{B}_T)$ и (по теореме) мера $P_T=P$ на этом пространстве, исходя из семейства польских пространств $(X_t, d_t)$, $t\in T$, и согласованного семейства вероятностных мер $P_M$, $M\subset T$, $|M|<\infty$, можно для всякого множества $S\subset T$ (не обязательно конечного) определить измеримое пространство $(X_S, \mathbf{B}_S)$ и меру $P_S$ на этом пространстве, исходя из семейства польских пространств $(X_t, d_t)$, $t\in S$ и согласованного семейства вероятностных

мер $P_M$, $M \subset S$, $|M| < \infty$. При этом проекция меры $P_T$ на $(X_S, \mathbf{B}_S)$ совпадает с $P_S$, т. е.

$$P_T(A \times X_{T \setminus S}) = P_S(A) \text{ для всех } A \in \mathbf{B}_S.$$

В самом деле, положим

$$Q_S(A) = P_T(A \times X_{T \setminus S}) \text{ для всех } A \in \mathbf{B}_S.$$

Следует показать, что $P_S = Q_S$. Но это вытекает из того, что проекции мер $P_S$ и $Q_S$ на $(X_M, \mathbf{B}_M)$ совпадают с $P_M$ для всякого конечного множества $M \subset S$ и единственности (в силу теоремы) вероятностной меры на $(X_S, \mathbf{B}_S)$ с таким свойством.

**Определение цепи Маркова с дискретным и непрерывным временем.** Процесс $\xi = \{\xi(t) : t \in T\}$, у которого множество $T$ не более чем счетно, называют процессом с **дискретным временем** (или случайной последовательностью). Как правило, в этом случае множество $T$ совпадает с множеством целых чисел или частью этого множества.

Если же $T$ совпадает с промежутком прямой, например $T = (-\infty, \infty)$ или $(0, \infty)$ или $[a, b]$ или $(a, b)$ и т. д., то случайный процесс $\xi$ в этом случае называется процессом с **непрерывным временем.**

Рассмотрим последовательность $\{\xi_n\}$ сл. в., которая в связи с новой терминологией представляет собой случайный процесс с дискретным временем. Предположим, что каждая сл. в. $\xi_n$ принимает значения из множества $E = \{0, 1, 2, \ldots\}$ и рассмотрим следующий простой вид зависимости сл. в. из последовательности $\{\xi_n\}$: распределение сл. в. $\xi_{n+1}$ может зависеть от значения, которое принимает сл. в. $\xi_n$, и не зависит от значений, принимаемых предшествующими сл. в. Например, $\xi_{n+1} = h_n(\xi_n, \eta_n)$, где (борелевские) функции $h_n$ заданы, а сл. величины $\eta_1, \eta_2, \ldots$ независимы между собой и $\eta_n$ не зависит от $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Образно говоря, при фиксированном настоящем будущее не зависит от прошлого. Формально это означает следующее:

$$P(\xi_{n+1} = i_{n+1} / \xi_1 = i_1, \ldots, \xi_n = i_n) = P(\xi_{n+1} = i_{n+1} / \xi_n = i_n) \quad (1)$$

для всех $n \geqslant 1$ и $i_k \in E$, $1 \leqslant k \leqslant n+1$, таких, что

$$P(\xi_1 = i_1, \ldots, \xi_n = i_n) > 0.$$

О случайных величинах $\{\xi_n\}$, удовлетворяющих (1), говорят, что они **связаны в цепь Маркова**, а сама

последовательность $\{\xi_n\}$ называется **цепью Маркова с дискретным временем.** Такая цепь называется **однородной** (относительно времени), если для всех $i, j \in E$ вероятность

$$P(\xi_{n+1} = j / \xi_n = i) = p_{ij}$$

не зависит от («времени») $n$. Эволюция однородной цепи Маркова $\{\xi_n\}$ определяется

а) начальным распределением сл. в. $\xi_1$, т. е: набором чисел

$$P(\xi_1 = i) = p_i, \quad i \in E; \quad p_i \geqslant 0 \text{ и } \Sigma p_i = 1;$$

б) матрицей $\{p_{ij}\}$ переходных вероятностей за один шаг.

При этом множество $E$ называется множеством состояний (фазовым пространством) цепи, а вероятность

$$P(\xi_{n+1} = j / \xi_1 = i) = p_{ij}^n$$

вероятностью перехода из состояния $i \in E$ в состояние $j \in E$ **за $n$ шагов.** В частности, $p_{ij}^1 = p_{ij}$. Из (1) следует

$$p_{ij}^{m+n} = \sum_{k \in E} p_{ik}^m \cdot p_{kj}^n. \tag{2}$$

**Замечание 2.** Обычно в качестве фазового пространства $E$ берется **минимальное** множество состояний. Это означает, что для всякого $j \in E$ существуют $i \in E$ и «время» $n \geqslant 1$ такие, что $p_{ij}^n > 0$ (иначе существовало бы состояние $j$, в которое нельзя перейти за любое время $n$, стартуя с любого состояния $i$).

Рассмотрим сл. процесс $\xi = \{\xi(t) : t \in T = (0, \infty)\}$, принимающий значения из $E = \{0, 1, 2, \ldots\}$, и предположим, что

$$P\{\xi(t_{n+1}) = i_{n+1} / \xi(t_1) = i_1, \ldots, \xi(t_n) = i_n\} = \\ = P\{\xi(t_{n+1}) = i_{n+1} / \xi(t_n) = i_n\} \tag{3}$$

для любого целого числа $n \geqslant 1$, любых моментов $t_1 < \ldots < t_{n+1}$ из $T$ и любых состояний $i_1, \ldots, i_{n+1}$ из $E$ таких, что

$$P\{\xi(t_1) = i_1, \ldots, \xi(t_n) = i_n\} > 0.$$

О случайных величинах $\{\xi(t) : t \in T\}$, удовлетворяющих

(3), говорят, что они **связаны в цепь Маркова**, а сам сл. процесс $\xi$ называется **цепью Маркова с непрерывным временем**. Такая цепь называется **однородной** (относительно времени), если

$$P\{\xi(s+t)=j/\xi(s)=i\}=p_{ij}^{t}$$

не зависит от $s\in T$ для любых $i$, $j$ из $E$ и $t\in T$. При этом $p_{ij}^{t}$ называется вероятностью перехода из состояния $i$ в состояние $j$ за время $t$. Из (3) следует

$$p_{ij}^{s+t}=\sum_{k} p_{ik}^{s}\cdot p_{kj}^{t}. \qquad (4)$$

**Определение.** Сл. процесс $\{\xi(t):t\in T\}$, где $T=\{1,2,\ldots\}$ или $T=(0,\infty)$, принимающий значения из $E=\{0,1,2,\ldots\}$, назовем **однородной марковской цепью** (в широком смысле), если вероятности

$$P_i\{\xi(s+t)=j\mid\xi(s)=i\}=p_{ij}^{t}$$

не зависят от $s\in T$ для любых $i,j\in E$ и $t\in T$, удовлетворяют уравнению Колмогорова—Чепмена

$$p_{ij}^{s+t}=\sum_{k} p_{ik}^{s}\cdot p_{kj}^{t}$$

для всех $s,t\in T$, $i,j\in E$ и

$$\sum_{j} p_{ij}^{t}=1$$

для всех $i\in E$ и $t\in T$.

**Замечание 3.** В этом определении не предполагается, что условие (1) или (3) выполняется.

**Замечание 4.** Однородная марковская цепь определяет семейство матриц $\{P^t:t\in T\}$, удовлетворяющих условиям

а) для каждого $t\in T$ матрица $P^t=\{p_{ij}^{t}\}$ является **стохастической**, т. е.

$$p_{ij}^{t}\geqslant 0 \text{ и } \sum_{j\geqslant 0} p_{ij}^{t}=1 \quad \forall\, i,j,t;$$

б) $P^{s+t}=P^s\cdot P^t$ $\forall$ $s,t\in T$.

Условие б) есть лишь другая запись уравнения Колмогорова—Чепмена. Обратно, всякое семейство

матриц $\{P^t: t\in T\}$, удовлетворяющих а)—б), определяет некоторую однородную марковскую цепь $\{\xi(t): t\in T\}$ с матрицей переходных вероятностей $P^t$.

**Примеры однородных цепей Маркова.**

**Пример 1.** Рассмотрим случайное блуждание частицы по целым точкам отрезка $[a, b]$. Здесь $a$ и $b$ — целые числа, $a<b$. Частица, находящаяся в точке (состоянии) $i$, $a\leqslant i\leqslant b$, переходит за один шаг в соседнее состояние $i+1$, или $i-1$, или остается в состоянии $i$ с вероятностями $p_i$, $q_i$ и $r_i$ соответственно; $p_i+q_i+r_i=1$. Конечно, $q_a=0=p_b$; см. рис. 2.

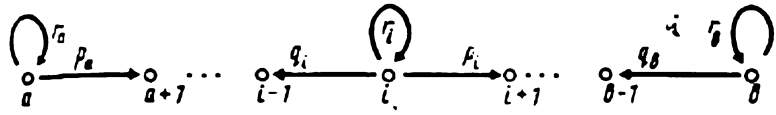



Рис. 2

Пусть частица стартует из некоторого состояния $\xi_0\in[a, b]$. Обозначим через $\xi_n$ ее состояние через $n$ шагов. Случайные величины последовательности $\{\xi_n\}$ связаны в однородную цепь Маркова с вероятностями перехода

$$p_{i,i+1}=p_i,\quad p_{i,i-1}=q_i,\quad p_{ii}=r_i;$$
$$q_a=0=p_b;\quad p_{ij}=0\quad \text{для}\quad |i-j|>1.$$

Рассмотрим частные случаи, в которых предполагается, что $p_i>0$ и $q_i>0$ для $a<i<b$.

**Случай 1:** $r_a=1$. Это означает, что частица, достигнув состояния $a$, навсегда остается в этом состоянии. В связи с этим состояние $a$ называют часто **поглощающим экраном.** Аналогично, если $r_b=1$, то состояние $b$ по той же причине называют поглощающим экраном.

**Случай 2:** $a=-\infty$, $b=+\infty$; $r_i=0$, $p_i=p$ $\forall i$. Блуждание частицы в этом случае часто называют **свободным случайным блужданием** по целым точкам прямой. В частности, если $p_i=p=1/2$ $\forall i$ блуждание называется **симметричным.**

**Случай 3:** $r_i=0$, $p_i=p$ для $a<i<b$; $p_a=p$, $r_a=1-p$; $r_b=p$, $q_b=1-p$; см. рис. 3.

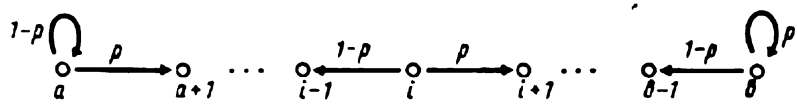



Рис. 3

Такое блуждание частицы в $[a, b]$ получается из свободного случайного блуждания, если всякий раз, когда частица попадает в состояние $a-1$, она переносится в состояние $a$; если же частица попадает в состояние $b+1$, она переносится в состояние $b$. Иногда такое блуждание интерпретируется как процесс перемещения частицы с двумя «отражающими экранами», помещенными в точках $a-1/2$ и $b+1/2$. В связи с такой интерпретацией этот случай носит название блуждания частицы с двумя **отражающими экранами**. Если $b=+\infty$, то получим случайное блуждание частицы с одним отражающим экраном.

**Пример 2** (пуассоновский процесс). Пусть $\{z_k\}$ — последовательность независимых неотрицательных сл. в., имеющих одинаковое экспоненциальное распределение

$$P(z_k<x)=1-e^{-ax}, \quad x\geqslant 0; \quad k\geqslant 1$$

с параметром $a$. Положим

$$t_0=0, \ t_k=z_1+\ldots+z_k, \quad k\geqslant 1; \quad t_{k+1}\geqslant t_k.$$

Через $\nu(t)$ обозначим число точек последовательности $\{t_k: k\geqslant 1\}$, расположенных левее точки $t$, т. е.

$$\nu(t)=\sup\{k: t_k<t\}.$$

Например, если $z_1, z_2, \ldots$ — длительности жизни последовательности заменяемых элементов, то $\nu(t)$ есть число элементов, замененных до момента $t$. **Процесс $\nu(t)$, $t>0$, является однородной марковской цепью (в широком смысле).** Чтобы доказать это утверждение, достаточно проверить, что

$$P\{\nu(s+t)=j/\nu(s)=i\}=p_{ij}^t=\frac{(at)^{j-i}}{(j-i)!}e^{-at} \quad \text{для } j\geqslant i$$

и $p_{ij}^t=0$ для остальных $i$ и $j$ (тем самым, $p_{ij}^t$ не зависит от $s$), так как уравнение Колмогорова—Чепмена

$$p_{ij}^{s+t}=\sum_k p_{ik}^s p_{kj}^t$$

следует из этой формулы автоматически. При этом используется

**Лемма.** Пусть $\xi$ и $\tau$ — независимые неотрицательные сл. в.; при этом сл. в. $\xi$ подчинена экспоненциаль-

ному распределению. Тогда

$$P(\xi - \tau < x \mid \xi \geqslant \tau) = P(\xi < x) \quad \forall x.$$

Таким образом, сл. в. $\nu(t)$ для всякого $t \geqslant 0$ имеет пуассоновское распределение с параметром $at$. Процесс $\{\nu(t) : t \geqslant 0\}$ называется **пуассоновским.**

**Пример 3.** Рассмотрим однородную цепь Маркова с дискретным временем, определяемую матрицей переходных вероятностей за один шаг $P = \{p_{ij}\}$. Отметим, что если $p^{(k)} = \{p_{ij}^{(k)}\}$ есть матрица переходных вероятностей за $k$ шагов, то в силу уравнения Колмогорова—Чепмена

$$P^{(k)} = P^k; \quad k = 1, 2, \ldots$$

Будем теперь предполагать, что каждый шаг длится случайное время и длительности шагов независимы и имеют экспоненциальное распределение с параметром $a$. Другими словами, изменение состояния может происходить в моменты скачков пуассоновского процесса (см. предыдущий пример) и управляется матрицей переходных вероятностей $P$. Обозначим через $\xi(t)$ состояние в момент $t$. Тогда

$$p_{ij}^t = P\{\xi(s+t) = j \mid \xi(s) = i\} = \sum_{k \geqslant 0} \frac{(at)^k}{k!} e^{-at} p_{ij}^{(k)},$$

где $p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$. Уравнение Колмогорова—Чепмена для переходных вероятностей $\{p_{ij}^t\}$ выполняется, если оно выполняется для $\{p_{ij}^{(k)}\}$. Полагая $P(t) = \{p_{ij}^t\}$, получим

$$P(t) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{(at)^k}{k!} e^{-at} P^k,$$

т. е.

$$P(t) = e^{at(P-I)},$$

где $I = \{\delta_{ij}\}$. Таким образом, $\{\xi(t) : t \geqslant 0\}$ есть однородная цепь Маркова с непрерывным временем. На самом деле всякая однородная цепь Маркова с непрерывным временем и конечным числом состояний устроена таким же образом.

**Пример 4.** Рассмотрим блуждание частицы по точкам множества $E \subset \{0, 1, 2, \ldots\}$. Некоторые состояния (точки) из $E$ считаются поглощающими. Пусть в

некоторый момент частица перешла в состояние $i$. Если $i$ — поглощающее состояние, то частица остается в нем навсегда. В противном случае время пребывания в состоянии $i$ определяется экспоненциальным распределением $1-\exp\{-\alpha_i x\}$, $\alpha_i>0$, $x\geqslant 0$ и не зависит от предыдущей траектории частицы. После этого частица переходит в состояние $j$ с вероятностью $q_{ij}$ и т. д., $q_{ii}=0$. Пусть $\xi(t)$ — состояние частицы в момент $t$, начинающей блуждание с некоторого состояния $\xi(0)\in E$. Однородная марковская цепь $\{\xi(t): t\geqslant 0\}$ с непрерывным временем называется **минимальной** цепью (процессом) Маркова. Оказывается, при довольно общих предположениях однородная марковская цепь с непрерывным временем эквивалентна (в смысле совпадения конечномерных распределений) минимальной цепи Маркова.

**Замечание 5.** Определение минимальной цепи Маркова может быть сделано более корректно следующей конструкцией такого процесса. Рассмотрим последовательность

$$\xi_n=(z_n, \xi_n);\ n=0, 1, 2, \ldots$$

сл. величин со значениями в $[0, \infty)\times E$, связанных в однородную цепь Маркова с переходными вероятностями вида

$$P(z_{n+1}<y,\ \xi_{n+1}=j\,|\,z_n=x,\ \xi_n=i)=$$

$$=P(z_{n+1}<y,\ \xi_{n+1}=j\,|\,\xi_n=i)=q_{ij}(1-e^{-\alpha_i y}).$$

Задавая начальное распределение сл. в. $\zeta_0$, по теореме Колмогорова устанавливается существование такой цепи. Считая $z_0=0$, введем следующую интерпретацию процесса. Некоторая частица на интервале времени длины $z_1$ находится в состоянии $\xi_0$, на следующем интервале длины $z_2$ находится в состоянии $\xi_1$ и т. д., т. е. в интервале $t_n\leqslant t<t_{n+1}$, где $t_0=0$, $t_n=z_1+\ldots+z_n$, частица находится в состоянии $\xi_n$. Остается положить

$$\xi(t)=\xi_n, \text{ если } t_n\leqslant t<t_{n+1}.$$

Из построения и основного свойства экспоненциального распределения, см. лемму, следует (показать!), что $\{\xi(t): t\geqslant 0\}$ есть однородная цепь Маркова с непрерывным временем.

**Пример 5** (процесс гибели и размножения). Вновь рассмотрим минимальный марковский процесс с непрерывным временем и множеством состояний $E=\{0, 1, 2, ..., N\}$ или $E=\{0, 1, 2, ...\}$. Но предположим теперь, что скачки могут происходить лишь в соседние состояния. Это означает, что $q_{ij}=0$ при $|i-j|>1$. Положим $q_{i\,i+1}=p_i$ при $i\geqslant 0$ и $q_{i\,i-1}=q_i=1-p_i$ при $i\geqslant 1$. Такой процесс (стартующий с некоторого состояния $\xi(0)\in E$) называется **процессом гибели и размножения.**

Если $p_i=1$ для всех $i$, то говорят о **процессе чистого размножения.** Например, таким процессом является пуассоновский процесс, см. пример 2. Если же $p_i=0$ для всех $i$, то такой процесс называют **процессом чистой гибели.**

Часто при описании динамических систем (систем, развивающихся во времени) с помощью процесса гибели и размножения полезны бывают следующие простые свойства экспоненциально распределенных сл. в. (дополняющие основное свойство экспоненциального распределения, см. лемму). Пусть $\xi_1, ..., \xi_n$ — независимые сл. в., имеющие экспоненциальные распределения с параметрами $a_1, ..., a_n$ соответственно. Тогда

(1) сл. в. $\min(\xi_1, ..., \xi_n)$ имеет экспоненциальное распределение с параметром $a=a_1+...+a_n$;

$$(2)\quad P(\xi_1<\xi_2)=\frac{a_1}{a_1+a_2}.$$

**Предельное распределение цепи Маркова.** Рассмотрим однородную марковскую цепь, определяемую матрицей $P^t=\{p^t_{ij}\}$ переходных вероятностей. Здесь $T=\{1, 2, ...\}$ или $T=(0, \infty)$; $E=\{0, 1, 2, ...\}$ — множества состояний цепи.

Цепь Маркова назовем **сжимающей**, если для любой пары состояний $i_1$, $i_2\in E$ существуют время $t\in T$ и состояние $j\in E$ такие, что $p^t_{i_1 j}>0$ и $p^t_{i_2 j}>0$ (т. е. система может перейти из любой пары состояний в некоторое за одно и то же время).

Распределение $\pi=\{\pi_i\}$ на $E$ (т. е. набор чисел $\pi=(\pi_0, \pi_1, ...)$ такой, что $\pi_i\geqslant 0$ и $\sum_i \pi_i=1$) называется **стационарным**, если

$$\sum_i \pi_i p^t_{ij}=\pi_j \quad \text{для всех } t\in T,\ j\in E.$$

**Теорема 0.** Если однородная цепь Маркова (с дискретным или непрерывным временем) принимает конечное число состояний, то следующие утверждения равносильны:

1°. Существует единственное стационарное распределение $\pi=\{\pi_i\}$ и $p_{ij}^t \to \pi_j$ при $t\to\infty$ для любых $i, j$.

2°. Цепь является сжимающей.

Следующие теоремы касаются общего случая, когда цепь принимает не обязательно конечное число значений.

**Теорема 1.** Пусть однородная цепь Маркова является сжимающей. Тогда для любых состояний $i$ и $j$ из $E$ существует $\lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}^t$; при этом:

1°. Если не существует стационарного распределения, то $p_{ij}^t \to 0$ для всех $i, j$ из $E$ (при $t\to\infty$).

2°. Если существует стационарное распределение $\pi=\{\pi_i\}$, то оно единственное и $p_{ij}^t \to \lambda_i \pi_j$ при $t\to\infty$ для всех $i$ и $j$, где $\lambda_i$, возможно, зависит от $i$ и $0<\lambda_i<1$.

**Теорема 2.** Пусть существует стационарное распределение $\pi=\{\pi_i\}$. Тогда следующие утверждения равносильны:

1°. $\lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}^t = \pi_j \quad \forall\ i,\ j.$

2°. Цепь является сжимающей, и всякое ограниченное решение системы уравнений

$$\sum_j p_{ij}^t x_j = x_i \quad \forall\, i, t$$

имеет вид

$$x=(x_0, x_1, \ldots)=c(1, 1, \ldots).$$

Цепь Маркова называется **неприводимой**, если для любой пары состояний $i$ и $j$ существует $t\in T$ такое, что $p_{ij}^t > 0$.

**Теорема 3.** Пусть существует стационарное распределение $\pi=\{\pi_i\}$. Тогда следующие утверждения равносильны:

1°. $\lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}^t = \pi_j > 0 \quad \forall\ i, j.$

2°. Цепь является сжимающей и неприводимой.

3°. Для любой пары состояний $i$ и $j$ существует время $\tau=\tau(i,j)\in T$ такое, что $p_{ij}^t>0$ для всех $t\geqslant\tau$.

Если $T=\{1,2,\ldots\}$, то каждое из этих утверждений равносильно следующему:

4°. Цепь является непериодической и неприводимой.

При этом однородная цепь Маркова называется **непериодической**, если для любой пары состояний $i$ и $j$ наибольший общий делитель чисел $\{n : p_{ij}^n>0\}$ равен единице.

**Замечание 6.** Распределение $\alpha=\{\alpha_i\}$ на $E$ (т. е. набор чисел $\alpha=\{\alpha_i\}$ таких, что $\alpha_i\geqslant 0$ и $\sum_i \alpha_i=1$) называется **предельным распределением** цепи Маркова, если для некоторого состояния $i\in E$

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}^t=\alpha_j \quad \forall\ j.$$

Отметим, что предельное распределение является стационарным, т. е. удовлетворяет системе уравнений

$$\sum_i \alpha_i p_{ij}^t=\alpha_j \quad \forall\ j,t.$$

### ЗАДАЧИ 101—120

**101.** Пусть $F_1$, $F_2,\ldots$ — последовательность ф. р. Показать, что существует последовательность независимых действительных сл. в. $\xi_1$, $\xi_2,\ldots$ таких, что $P(\xi_n<x)=F_n(x)$ для всех $n\geqslant 1$ и $x\in R^1$.

**102.** Рассмотрим два числа $\mu$ и $\sigma$. Показать, что существует последовательность независимых действительных сл. в. $\xi_1$, $\xi_2,\ldots$ таких, что $E\xi_n^2<\infty$ и $E\xi_n=\mu$, $\operatorname{var}\xi_n=\sigma^2$ для всех $n\geqslant 1$.

**103.** Рассмотрим матрицу $P=\{p_{ij}: i,\ j=0,1,2,\ldots\}$ такую, что $p_{ij}\geqslant 0$ $\forall i,j$ и $\sum_j p_{ij}=1$ $\forall\ i$. Показать, что существует последовательность сл. в. $\xi_1$, $\xi_2,\ldots$, принимающих значения из $E=\{0,1,2,\ldots\}$ и связанных в однородную цепь Маркова, т. е.

$$P(\xi_{n+1}=i_{n+1}\,|\,\xi_1=i_1,\ldots,\xi_n=i_n)=P(\xi_{n+1}=$$

$$= i_{n+1} \mid \xi_n = i_n) = p_{i_n i_{n+1}}$$

для любого целого числа $n \geqslant 1$, любых чисел $i_1, \ldots, i_{n+1}$ из $E$, если только $P(\xi_1 = i_1, \ldots, \xi_n = i_n) \neq 0$.

**104.** Рассмотрим семейство матриц $p^t = \{p_{ij}^t : i, j = 0, 1, 2, \ldots\}$, $t > 0$ таких, что $p_{ij}^t \geqslant 0$ $\forall\, i, j, t$, $\sum_j p_{ij}^t = 1$ $\forall\, i, t$ и $p^{s+t} = p^s \cdot p^t$ (т. е. $p_{ij}^{s+t} = \sum_k p_{ik}^s p_{kj}^t$) $\forall\, s, t > 0$.

Показать, что существует случайный процесс $\{\xi(t), t > 0\}$ со значениями из $E = \{0, 1, \ldots\}$, связанный в однородную цепь Маркова (т. е.

$$P\{\xi(t_{n+1}) = i_{n+1} / \xi(t_1) = i_1, \ldots, \xi(t_n) = i_n\} = P\{\xi(t_{n+1}) = i_{n+1} \mid \xi(t_n) = i_n\}$$

для любого целого числа $n \geqslant 1$, любых чисел $i_1, \ldots, i_{n+1}$ из $E$ и любых положительных чисел $t_1, \ldots, t_{n+1}$, если только $P\{\xi(t_1) = i_1, \ldots, \xi(t_n) = i_n\} \neq 0$) и

$$P\{\xi(s+t) = j \mid \xi(s) = i\} = p_{ij}^t \quad \forall\, i, j \in E; \quad s > 0, t > 0.$$

**105.** Пусть задано некоторое множество $T$, вектор $\mu = \{\mu_t, t \in T\}$ и симметрическая неотрицательно определенная матрица $A = \{a_{st} : s, t \in T\}$ (последнее означает, что для любого вектора $x = \{x_t, t \in T\}$, у которого лишь конечное число координат $x_t$ отлично от нуля, выполнено $(Ax, x) = \sum_{s,t} a_{st} x_s x_t \geqslant 0$). Показать, что существует вероятностное пространство $(\Omega, S, P)$ и случайный процесс $\{\xi(t), t \in T\}$ такие, что

1) конечномерные распределения процесса являются нормальными;

2) $E\xi(t) = \mu_t$, $\operatorname{cov}(\xi(s), \xi(t)) = a_{st}$ $\forall s, t \in T$.

Такой процесс называется гауссовским.

**106.** Рассмотрим гауссовский процесс $\{\xi(t) : t \in T = [0, \infty)\}$, у которого

$$E\xi(t) = \mu \cdot t, \quad \operatorname{cov}(\xi(s), \xi(t)) = \sigma^2 \cdot \min(s, t) \quad \forall s, t \geqslant 0$$

(такой процесс называется броуновским или винеровским процессом с коэффициентом сноса $\mu$ и диффузией $\sigma > 0$). Показать, что этот процесс имеет независимые приращения, т. е. для любых чисел $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ случайные величины

$$\xi(t_2)-\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n)-\xi(t_{n-1})$$

являются независимыми.

**107.** Показать, что существует гауссовский процесс $\{\xi(t): t \in T=(-\infty, \infty)\}$, у которого

$$\operatorname{cov}(\xi(s), \xi(t)) = e^{-|t-s|}$$

(такой процесс называется гауссовско-марковским).

**108.** Показать, что каждая вероятностная мера $P$ на метрическом пространстве регулярна, т. е. если $B$ — борелевское множество этого пространства и $\varepsilon>0$, то существует замкнутое множество $F$ и открытое множество $G$ такие, что $F \subset B \subset G$ и $P(G \setminus F)<\varepsilon$.

**109.** Показать, что каждая вероятностная мера $P$ на польском (полном сепарабельном метрическом) пространстве плотна, т. е. для каждого $\varepsilon>0$ существует такое компактное множество $K$ этого пространства, что $P(K)>1-\varepsilon$.

**110.** Пусть $P$ — вероятностная мера на польском пространстве. Показать, что если $B$ — борелевское множество этого пространства и $\varepsilon>0$, то существует компакт $K$ такой, что $K \subset B$ и $P(B \setminus K)<\varepsilon$.

**111.** Пусть последовательность $\{\xi_t: t=0, 1, 2, \ldots\}$ сл. в. связана в цепь Маркова. Положим

$\text{П}=\{\xi_0=i_0, \ldots, \xi_{t-1}=i_{t-1}\}=$ «прошлое»,

$\text{Н}=\{\xi_t=i_t\}=$ «настоящее»,

$\text{Б}=\{\xi_{t+1}=i_{t+1}, \ldots, \xi_n=i_n\}=$ «будущее».

Показать, что

$$P(\text{ПБ}\,|\,\text{Н}) = P(\text{П}\,|\,\text{Н}) \cdot P(\text{Б}\,|\,\text{Н})$$

(т. е. прошлое и будущее независимы при фиксированном настоящем).

**112.** Пусть сл. величины $\xi_0, \xi_1, \ldots$ независимы и каждая принимает значения $\pm 1$ с вероятностями 1/2.

а) Образует ли последовательность сл. в.

$$\eta_n = \frac{1}{2}(\xi_n + \xi_{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

цепь Маркова?

б) Тот же вопрос относительно последовательности

$$\zeta_n = \xi_n \cdot \xi_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

**113.** Пусть $\{\xi_n: n=0, 1, 2, \ldots\}$ **есть цепь Маркова с**

множеством состояний $E=\{1, 2, 3\}$ и матрицей переходных вероятностей

$$P=\begin{bmatrix} 0 & \alpha & 1-\alpha \\ \alpha & 0 & 1-\alpha \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Определим последовательность $\eta_n$, $n=0, 1, 2, \ldots$, полагая

$$\eta_n=\begin{cases} 1 & \text{при } \xi_n<3, \\ 2 & \text{при } \xi_n=3. \end{cases}$$

Показать, что последовательность $\{\eta_n\}$ образует цепь Маркова.

**114.** (Достаточное условие существования стационарного распределения). Для того чтобы однородная неприводимая сжимающая цепь Маркова имела стационарное распределение достаточно существования числа $\varepsilon>0$, момента времени $s\in T$, конечного множества $E_0\subset E$ и набора неотрицательных чисел $(x_0, x_1, \ldots)$ таких, что

$$\sum_{j\geqslant 0} p_{ij}^s x_j \leqslant x_i-\varepsilon \text{ для } i\in \overline{E_0},$$

$$\sum_{j\geqslant 0} p_{ij}^s x_j<\infty \text{ для } i\in E_0.$$

Указание. Можно считать, что $E_0=\{0, 1, \ldots, i_0\}$. Положим

$$x_i^{(1)}=x_i, \quad x_i^{(n+1)}=\sum_{j\geqslant 0} p_{ij}^s x_j^{(n)}.$$

Показать, что

$$x_i^{(n+1)} \leqslant x_i^{(2)}+\sum_{j=0}^{i_0}(p_{ij}^{1\cdot s}+\ldots+p_{ij}^{(n-1)s})(x_j^{(2)}-x_j+\varepsilon)-$$

$$-(n-1)\varepsilon,$$

откуда

$$0<\frac{x_i^{(2)}}{n-1}\sum_{j=0}^{i_0}\frac{1}{n-1}(p_{ij}^{1\cdot s}+\ldots+p_{ij}^{(n-1)s})(x_j^{(2)}-x_j+$$

$$+\varepsilon)-\varepsilon.$$

115. Пусть $\{\nu_n : n \geqslant 1\}$ — независимые одинаково распределенные сл. в., принимающие неотрицательные целые значения. Образуем цепь Маркова $\{\xi_n : n \geqslant 0\}$, полагая

$$\xi_n = (\xi_{n-1} - 1)^+ + \nu_n, \quad n \geqslant 1; \quad \xi_0 = 0.$$

Показать, что если $E\nu_n = \rho < 1$, то цепь Маркова имеет инвариантное распределение $\{\pi_j : j \geqslant 0\}$ и

$$\lim_{n \to \infty} P(\xi_n = j) = \pi_j, \quad \sum_{j \geqslant 0} \pi_j = 1.$$

Указание. Достаточно считать, что $\rho > 0$. Положим

$$q_k = P(\nu_n = k).$$

Из $0 < E\nu_n < 1$ следует $0 < q_0 < 1$.

Случай 1: $q_0 + q_1 = 1$; тогда с вероятностью 1 $\xi_n = \nu_n = 0$ или 1 и $\pi = (q_0, q_1, 0, 0, \ldots)$.

Случай 2: $q_0 + q_1 < 1$. Пусть $q_m > 0$ для некоторого $m \geqslant 2$.

Тогда цепь является однородной неприводимой и сжимающей (учесть $q_0 > 0$, $q_m > 0$). Далее воспользоваться предыдущей задачей. Положить $x_j = j$; $j = 0, 1, 2, \ldots$, тогда если

$$p_{ij} = P(\xi_{n+1} = j \mid \xi_n = i),$$

то

$$\sum_{j \geqslant 0} p_{ij} x_j = E(\xi_{n+1} \mid \xi_n = i) = \begin{cases} E\nu_{n+1} = \rho, & i = 0, \\ i - 1 + E\nu_{n+1} = i - 1 + \rho, & i > 0. \end{cases}$$

116. Пусть матрица $P = \{p_{ij}\}$ переходных вероятностей однородной цепи Маркова с дискретным временем и конечным множеством состояний $E = \{1, \ldots, m\}$ является дважды стохастической, т. е.

$$\sum_i p_{ij} = 1 \quad \forall i \quad \text{и} \quad \sum_i p_{ij} = 1 \quad \forall j.$$

Показать, что равномерное (равновероятное) распределение на $E$ является стационарным.

117. (Продолжение). Показать, что этот же результат верен и для случая однородной цепи Маркова с непрерывным временем, если для каждого $t > 0$ матрица переходных вероятностей $P^t = \{p_{ij}^t\}$ является дважды стохастической.

**118.** Пусть для однородной марковской цепи со счетным множеством состояний $E=\{0, 1, 2, \ldots\}$ и матрицей переходных вероятностей $P^n=\{p_{ij}^n\}$ за $n$ шагов существует

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^n = \pi_j \quad \forall i, j,$$

не зависящий от $i$. Тогда

1) $\sum_i \pi_i \leqslant 1, \quad \pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}, \quad p_{ij} = p_{ij}^1;$

2) $\sum_i \pi_i = 0$ или $1;$

3) если $\pi_i = 0 \ \forall i$, то не существует стационарного распределения; если же $\sum_i \pi_i = 1$, то $\pi = (\pi_0, \pi_1, \ldots)$ есть единственное стационарное распределение.

**119.** Пусть для однородной цепи Маркова с конечным множеством состояний и матрицей переходных вероятностей $P^n = \{p_{ij}^n\}$ за $n$ шагов существует

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^n = \pi_j > 0 \quad \forall i, j, \quad \sum_j \pi_j = 1,$$

не зависящий от $i$ (такое распределение $\{\pi_j\}$ на $E$ называется эргодическим). Показать, что существуют числа $C$ и $\rho$ такие, что $0<\rho<1$ и

$$|p_{ij}^n - \pi_j| \leqslant C\rho^n \quad \forall i, j, n.$$

**120.** Пусть $\{\xi_n\}$ и $\{\overline{\xi}_n\}$ — две однородные марковские цепи с одним и тем же конечным множеством состояний и одинаковой матрицей переходных вероятностей $P=\{p_{ij}\}$, но, быть может, разными начальными распределениями (сл. в. $\xi_0$ и $\overline{\xi}_0$). Предположим, что

$$\min_{i,j} p_{ij} \geqslant \varepsilon > 0.$$

Показать, что

$$\sum_i |\overline{p}_i^n - p_i^n| \leqslant 2(1-\varepsilon)^n,$$

где

$$\bar{p}_i^n = P(\bar{\xi}_n = i), \quad p_i^n = P(\xi_n = i).$$

## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 101—120

**101.** Положим $T=\{1, 2, \ldots\}$, $X_t = R^1$ для $t \in T$; $X_M = \prod_{t \in M} X_t$ для $M \subset T$ и определим вероятностную меру $P_M$ на $(X_M, \mathbf{B}_M) = (R^n, \mathbf{B}^n)$ в случае $|M| = n$, полагая

$$P_M(B) = \prod_{t \in M} Q_t(B_t)$$

для прямоугольника $B = B_1 \times \ldots \times B_n \in \mathbf{B}^n$, где $B_k \in \mathbf{B}^1$, и $Q_t$ — вероятностная мера на $R^1$, соответствующая ф.р. $F_t$. Так как множество прямоугольников образует полуалгебру и $P_M$ есть вероятность на этой полуалгебре, то она продолжается единственным образом на минимальную $\sigma$-алгебру, содержащую эти прямоугольники, т. е. на $\mathbf{B}^n$. Семейство вероятностных мер $P_M$ (по конечным множествам $M \subset T$) удовлетворяет условию согласованности, так как для $N \subset M \subset T$ и прямоугольника $B = \prod_{t \in N} B_t \in \mathbf{B}_N$ имеем

$$P_M(B \times X_{M \setminus N}) = \prod_{t \in N} Q_t(B_t) \cdot \prod_{t \in M \setminus N} Q_t(X_t) =$$

$$= \prod_{t \in N} Q_t(B_t) = P_N(B)$$

в силу $Q_t(X_t) = Q_t(R^1) = 1$. Согласно следствию теоремы А. Н. Колмогорова существует процесс $\{\xi_t : t \in T\} = \{\xi_n : n = 1, 2, \ldots\}$, удовлетворяющий условию

$$P(\xi_1 \in B_1, \ldots, \xi_n \in B_n) = P_{\{1, \ldots, n\}}(B_1 \times \ldots \times B_n) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} Q_k(B_k)$$

для любого целого числа $n \geqslant 1$ и $B_k \in \mathbf{B}^1$ при $k = 1, \ldots, n$. В частности, выбирая $B_i = R^1$ для $i \neq k$, имеем

$$P(\xi_k \in B_k) = Q_k(B_k).$$

Следовательно,

$$P(\xi_1 \in B_1, \ldots, \xi_n \in B_n) = \prod_{k=1}^{n} P(\xi_k \in B_k)$$

для всех $n \geqslant 1$ и $B_k \in \mathbf{B}^1$, т. е. сл. в. $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы, а сл. в. $\xi_k$ имеет ф. р.

$$P(\xi_k < x) = P\{\xi_k \in B = (-\infty, x)\} = Q_k(B) = F_k(x).$$

**102.** Положим $F_n = $ ф. р. $N(\mu, \sigma^2)$ и воспользуемся результатом предыдущей задачи.

**103. Решение 1.** Выберем набор чисел $\{p_i\}$ такой, что $p_i \geqslant 0$ и $\sum_{i \geqslant 0} p_i = 1$. Для целого числа $n \geqslant 1$ определим меру $P_n$ на счетном множестве $E^n$, полагая

$$P_n(\alpha) = p_{i_1} p_{i_1 i_2} \ldots p_{i_{n-1} i_n} \text{ для } \alpha = (i_1, \ldots, i_n) \in E^n,$$

$$P_n(A) = \sum_{\alpha \in A} P_n(\alpha) \text{ для } A \subset E^n.$$

$P_n$ есть вероятностная мера. Действительно, $P_n$ принимает неотрицательные значения; $P_n(E^n) = 1$, так как

$$P_n(E^n) = \sum_{i_1, \ldots, i_n} p_{i_1} p_{i_1 i_2} \ldots p_{i_{n-1} i_n} = \sum_{i_1, \ldots, i_{n-1}} p_{i_1} p_{i_1 i_2} \ldots$$

$$\ldots p_{i_{n-2} i_{n-1}} \sum_{i_n} p_{i_{n-1} i_n} = \sum_{i_1, \ldots, i_{n-1}} p_{i_1} p_{i_1 i_2} \ldots p_{i_{n-2} i_{n-1}} =$$

$$= P_{n-1}(E^{n-1}) = \ldots = P_1(E^1) = \sum_{i_1} p_{i_1} = 1;$$

кроме того, $P$ есть $\sigma$-аддитивная функция множества, так как если множества $A_i \subset E^n$, $i = 1, 2, \ldots$, попарно не пересекаются, то

$$P_n\left(\bigcup A_i\right) = \sum_{\alpha \in \bigcup A_j} P_n(\alpha) = \sum_{\alpha \in A_1} P_n(\alpha) + \sum_{\alpha \in A_2} P_n(\alpha) + \ldots =$$

$$= \sum_i P_n(A_i).$$

Проверим условие согласованности семейства мер $\{P_n\}$, записываемое в виде $P_{n+1}(A \times E) = P_n(A)$ для $A \subset E^n$. Действительно,

$$P_{n+1}(A\times E)=\sum_{\alpha\in A\times E}P_{n+1}(\alpha)=\sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in A}\sum_{i_{n+1}}p_{i_1}p_{i_1i_2}\ldots$$

$$\ldots p_{i_{n-1}i_n}p_{i_ni_{n+1}}=\sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in A}p_{i_1}p_{i_1i_2}\ldots p_{i_{n-1}i_n}=$$

$$=\sum_{\alpha\in A}P_n(\alpha)=P_n(A).$$

Согласно следствию теоремы А. Н. Колмогорова существует сл. процесс $\{\xi_n: n=1, 2, \ldots\}$ со значениями из $E$ такой, что для $\alpha=(i_1, \ldots, i_n)\in E^n$ выполнено

$$P(\xi_1=i_1, \ldots, \xi_n=i_n)=P_n(\alpha)=p_{i_1}p_{i_1i_2}\ldots p_{i_{n-1}i_n},$$

откуда следует, что сл. в. $\xi_1, \xi_2, \ldots$ связаны в однородную цепь Маркова.

**Решение 2.** Для всякого $t\in T=\{1, 2, \ldots\}$ определим $p_{ij}^t$, полагая $p_{ij}^1=p_{ij}$ и

$$p_{ij}^{t+1}=\sum_k p_{ik}^t p_{kj}^1.$$

Ясно, что $p_{ij}^t\geqslant 0$ и $\sum_j p_{ij}^t=1 \quad \forall i, t$. Далее см. решение задачи 104.

**104.** Пусть $T=(0, \infty)$. Выберем набор чисел $\{p_i\}$ такой, что $p_i\geqslant 0$ и $\sum_{i\geqslant 0}p_i=1$. Положим $X_t=E$ для $t\in T$, $X_M=\prod_{t\in M}X_t=E^m$ для $M\subset T$ и $|M|=m$. Для всякого конечного множества $M=\{t_1, \ldots, t_m\}\subset T$ определим меру $P_M$ на счетном множестве $X_M$, полагая (при $t_1<\ldots<t_m$)

$$P_M(\alpha)=\sum_{i_0}p_{i_0}p_{i_0i_1}^{t_1}p_{i_1i_2}^{t_2-t_1}\ldots p_{i_{m-1}i_m}^{t_m-t_{m-1}},\quad \alpha=(i_1, \ldots, i_m)\in E^m,$$

$$P_M(A)=\sum_{\alpha\in A}P_M(\alpha),\quad \alpha\in A\subset X_M.$$

Условие согласованности, записываемое в виде

$$P_M(A\times X_{M\setminus N})=P_N(A) \text{ при } A\subset X_M,\ N\subset M,$$

достаточно проверить для случая $n=|N|=m-1$, для

которого оно следует из тождества $p_{ij}^{s+t} = \sum_k p_{ik}^s p_{kj}^t$.

Согласно следствию теоремы А. Н. Колмогорова существует процесс $\{\xi(t): t\in T\}$ такой, что

$$P\{\xi(t_1)=i_1, \ldots, \xi(t_m)=i_m\}=P_M(\alpha)$$

для всякого конечного множества $M=\{t_1, \ldots, t_m\}\subset T$ и любой точки $\alpha=(i_1, \ldots, i_m)\in E^m$. Из явного вида конечномерных распределений этого процесса следует, что он связан в однородную цепь Маркова.

**105.** Обычно при определении нормального распределения считается, что матрица ковариаций положительно определена. Будем рассматривать нормальное распределение и в случае, когда матрица $A$ ковариаций является неотрицательно определенной. (Такое распределение существует и равно слабому пределу нормальных распределений с положительно определенной матрицей $A+\varepsilon I$ при $\varepsilon\downarrow 0$. В этом случае соответствующая последовательность характеристических функций сходится к функции, непрерывной в нуле.)

Положим $X_t=R^1$ для $t\in T$, $X_M=\prod_{t\in M} X_t = R^m$ для $M\subset T$ при $|M|=m$. Для всякого множества $M=\{t_1, \ldots, t_m\}\subset T$ положим $A_M=\{a_{t_i t_j}\}$, $\mu_M=(\mu_{t_1}, \ldots, \mu_{t_m})'$ и определим вероятностную меру $P_M$ на $(X_M, \mathbf{B}_M)=(R^m, \mathbf{B}^m)$, полагая $P_m=N_m(\mu_m, A_m)$. Проверим условие согласованности семейства мер $P_M$, $M\subset T$, при $|M|<\infty$, записываемое в виде

$$P_M(B\times X_{M\setminus L})=P_L(B), \quad B\in\mathbf{B}_L, \quad L\subset M.$$

Достаточно рассмотреть случай $|L|=m-1$, $L=\{t_1, \ldots, t_{m-1}\}$ и тогда, если сл. вектор $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_m)'$ имеет нормальное распределение $P_M=N_m(\mu_M, A_M)$, то сл. вектор $C\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_{m-1})'$ имеет нормальное распределение $N_{m-1}(C\mu_M, CA_MC')=N_{m-1}(\mu_L, A_L)=P_L$, где $C=\{\delta_{ij}: i=1, \ldots, m-1;\ j=1, \ldots, m\}$. Поэтому $P_M(B\times R^1)=P_M(\xi\in B\times R^1)=P_M(C\xi\in B)=P_L(B)$.

Теперь согласно следствию теоремы А. Н. Колмогорова существует сл. процесс $\{\xi(t): t\in T\}$ со значениями в $R^1$ такой, что для всякого конечного множества $M=\{t_1, \ldots, t_m\}\subset T$ распределение сл. вектора $\xi_M=\{\xi(t_1), \ldots, \xi(t_m)\}'$ является нормальным распределением $P_M=N_m(\mu_M, A_M)$.

В частности, так как $\mu_M = \{\mu_{t_1}, \ldots, \mu_{t_m}\}'$, $A_M = \{\mathrm{cov}(\xi(t_i), \xi(t_j))\}$, то $E\xi(t_1) = \mu_{t_1}$, $\mathrm{cov}(\xi(t_1), \xi(t_2)) = a_{t_1 t_2}$.

**106.** Воспользуемся тем, что если сл. вектор имеет нормальное распределение, то независимость в совокупности его компонент равносильна их попарной некоррелированности. В данном случае вектор приращений имеет нормальное распределение. Остается убедиться, что

$$\mathrm{cov} = \mathrm{cov}\{\xi(t_{i+1}) - \xi(t_i),\ \xi(t_{j+1}) - \xi(t_j)\} = 0$$
$$\text{при } i < j.$$

Можно считать, что $t_i < t_{i+1} \leqslant t_j < t_{j+1}$; поэтому

$$\mathrm{cov} = \mathrm{cov}(\xi(t_{i+1}), \xi(t_{j+1})) + \mathrm{cov}(\xi(t_i), \xi(t_j)) -$$
$$- \mathrm{cov}(\xi(t_{i+1}), \xi(t_j)) - \mathrm{cov}(\xi(t_i), \xi(t_{j+1})) =$$
$$= \sigma^2[t_{i+1} + t_i - t_{i+1} - t_i] = 0.$$

**107.** В силу задачи 105 достаточно проверить, что матрица $A = \{a_{st} : s,\ t \in T\}$, где $a_{st} = e^{-|s-t|}$, является положительно определенной. Это сводится к проверке того, что для любых $n$ чисел $t_1 < \ldots < t_n$ матрица $\{e^{-|t_i - t_j|}\}$ является положительно определенной. Последняя матрица имеет вид

$$\begin{bmatrix} \underline{\alpha_1} & \underline{\alpha_1} & \underline{\alpha_1} & \cdot & \underline{\alpha_1} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdot & \alpha_n \\ \underline{\alpha_1} & \underline{\alpha_2} & \underline{\alpha_2} & \cdot & \underline{\alpha_2} \\ \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdot & \alpha_n \\ \underline{\alpha_1} & \underline{\alpha_2} & \underline{\alpha_3} & \cdot & \underline{\alpha_3} \\ \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_3 & \cdot & \alpha_n \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot \\ \underline{\alpha_1} & \underline{\alpha_2} & \underline{\alpha_3} & \cdot & \underline{\alpha_n} \\ \alpha_n & \alpha_n & \alpha_n & \cdot & \alpha_n \end{bmatrix}, \quad \alpha_i = e^{t_i}. \qquad (*)$$

Приведем несколько последних критериев положительной определенности матрицы.

**К1.** (Критерий Сильвестра). Матрица $A = \{a_{ij}\}$ размерности $n \times n$ положительно определена, если и только если положительны определители матриц

$$a_{11},\quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \ldots, A.$$

К2. $A>0$, $B>0 \Rightarrow A+B>0$, $A \circ B=\{a_{ij} \cdot b_{ij}\}>0$. Здесь $A>0$ означает, что матрица $A$ является положительно определенной.

К3. Пусть $A=\{a_{ij}\}>0$ и $f(z)=\sum\limits_{k \geqslant 0} a_k z^k \not\equiv \text{const}$ есть степенной ряд с неотрицательными коэффициентами и кругом сходимости, содержащим числа $a_{ij}$. Тогда $\{f(a_{ij})\}>0$.

В частности, из К2 и К3 следует, что если $A=\{a_{ij}\}>0$, $B=\{b_{ij}\}>0$, $f(z)=\sum\limits_{k \geqslant 0} a_k z^k$ и $g(z)=\sum\limits_{k \geqslant 0} b_k z^k$ — степенные ряды с неотрицательными коэффициентами, хотя бы один из которых не равен тождественно константе, то $\{f(a_{ij}) \cdot g(b_{ij})\}>0$. Предполагается еще, что числа $a_{ij}$ находятся в круге сходимости 1-го ряда, а числа $b_{ij}$ — в круге сходимости 2-го ряда.

Например, вышеуказанная матрица (*) представляется в виде $A \circ B$, где

$$A=\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \cdot \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_2 \cdot \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \cdot \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \cdot \alpha_n \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \cdot \beta_n \\ \beta_2 & \beta_2 & \beta_3 \cdot \beta_n \\ \beta_3 & \beta_3 & \beta_3 \cdot \beta_n \\ \beta_n & \beta_n & \beta_n \cdot \beta_n \end{bmatrix},$$

$$\beta_k = 1/\alpha_k.$$

Поэтому положительная определенность матрицы (*) в силу К2 следует из $A>0$ и $B>0$, что в свою очередь вытекает, например, из критерия К1 Сильвестра (вычитая в матрице $A$ из каждой строки предыдущую, получим $\det A=\alpha_1(\alpha_2-\alpha_1)\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1})$; аналогично, вычитая в матрице $B$ из каждой строки следующую строку, получим $\det B=(\beta_1-\beta_2)(\beta_2-\beta_3)\ldots\beta_n)$).

Критерий К1 доказывается в курсе «Алгебра»; К3 следует из К2, так как

$$\sum_{i,j} f(a_{ij}) x_i x_j = \sum_{k \geqslant 0} a_k \left( \sum_{i,j} a_{ij}^k x_i x_j \right).$$

Одно из чисел $a_1, a_2, \ldots$ отлично от нуля, и для каждого $k \geqslant 1$ (в силу К2) матрица $\{a_{ij}^k\} > 0$.

Докажем критерий К2. Представим $A$ в виде $A = H\Lambda H'$, где $H = \{h_{ij}\}$ — ортогональная матрица, $\Lambda = \{\lambda_i \delta_{ij}\}$ — диагональная матрица. Положим $\lambda = \min(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) > 0$. Так как $a_{ij} = \sum_k h_{ik}\lambda_k h_{jk}$, то

$$\sum_{i,j} a_{ij} b_{ij} x_i x_j = \sum_k \lambda_k \sum_{i,j} b_{ij} (h_{ik} x_i)(h_{jk} x_j) \geqslant$$

$$\geqslant \lambda \sum_{i,j} b_{ij} x_i x_j \sum_k h_{ik} h_{jk} = \lambda \sum_{i,j} b_{ij} x_i x_j \delta_{ij} =$$

$$= \lambda [b_{11} x_1^2 + \ldots + b_{nn} x_n^2].$$

Простое решение получается, если воспользоваться тем, что х. ф. распределения Коши, имеющего плотность

$$f(u) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+u^2}, \quad -\infty < u < \infty,$$

равна $e^{-|t|}$. Поэтому для любого вектора $x = \{x_\alpha\}$ с действительными компонентами и конечной размерности

$$(Ax, x) = \sum_{\alpha,\beta} e^{-|t_\alpha - t_\beta|} x_\alpha x_\beta =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t_\alpha - t_\beta)u} f(u)\, du\, x_\alpha x_\beta =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha,\beta} e^{i(t_\alpha - t_\beta)u} x_\alpha x_\beta f(u)\, du =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_\alpha e^{it_\alpha u} x_\alpha \sum_\beta \overline{e^{it_\beta u}} x_\beta f(u)\, du =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_\alpha e^{it_\alpha u} x_\alpha \right|^2 f(u)\, du \geqslant 0.$$

108. Обозначим метрику пространства $\rho(x, y)$ и положим $\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y) : y \in A\}$, $\mathcal{K}$ — класс борелев-

ских множеств, допускающих при каждом $\varepsilon>0$ аппроксимацию, указанную в формулировке задачи, $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ — соответственно классы замкнутых и открытых множеств. Так как $\mathscr{F}=\{U^c: U\in\mathscr{G}\}$, то $\sigma(\mathscr{F})=\sigma(\mathscr{G})$ — борелевская $\sigma$-алгебра. Ниже покажем, что $\mathscr{H}\supset\mathscr{F}$ и что $\mathscr{H}$ — $\sigma$-алгебра, откуда будет следовать, что $\mathscr{H}$ содержит все борелевские множества.

Если $A$ — замкнутое множество, то $G_n=\{x:\rho(x, A)<1/n\}\downarrow A$, $P(G_n)\downarrow P(A)$. Существует $G=G_{n_0}$ такое, что $P(G\setminus A)<\varepsilon$. Открытое множество $G$ и замкнутое множество $F=A$ аппроксимируют $A$.

Пусть $A_n\in\mathscr{H}$, $F_n\subset A_n\subset G_n$, $P(G_n\setminus F_n)<\varepsilon/2^{n+1}$. Существует такое $n_0$, что

$$P\Big(\Big(\bigcup_1^{\infty} G_n\Big)\setminus\Big(\bigcup_1^{n_0} F_n\Big)\Big)\leqslant P\Big(\Big(\bigcup_1^{\infty} G_n\Big)\setminus\Big(\bigcup_1^{\infty} F_n\Big)\Big)+$$

$$+P\Big(\Big(\bigcup_1^{\infty} F_n\Big)\setminus\Big(\bigcup_1^{n_0} F_n\Big)\Big)\leqslant P\Big(\Big(\bigcup_1^{\infty} G_n\Big)\setminus\Big(\bigcup_1^{n_0} F_n\Big)\Big)+$$

$$+\varepsilon/2<\varepsilon.$$

Открытое множество $G=\bigcup_1^{\infty} G_n$ и замкнутое множество $F=\bigcup_1^{n_0} F_n$ аппроксимируют $\bigcup_1^{\infty} A_n$. Из определения класса $\mathscr{H}$ следует, что $A\in\mathscr{H}\Rightarrow A^c\in\mathscr{H}$ (если $F\subset A\subset G$, $P(G\setminus F)<\varepsilon$, то $F_1=G^c\subset A^c\subset F^c=G_1$, $P(G_1\setminus F_1)=P(G\setminus F)<\varepsilon$. Итак, $\mathscr{H}$ — $\sigma$-алгебра.

**109.** В силу сепарабельности при каждом $n\geqslant 1$ существует последовательность $A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \ldots$ открытых шаров радиуса $1/n$, покрывающих все пространство. Выберем $m_n$ так, чтобы $P\left(\bigcup_{l=1}^{m_n} A_l^{(n)}\right)>1-\varepsilon/2^n$ и положим $A=\bigcap_{n\geqslant 1}\bigcup_{l=1}^{m_n} A_l^{(n)}$. Множество $A$ при каждом $\delta$ покрывается конечным числом шаров радиуса $\delta$ (так будет при $1/n<\delta$), и, следовательно, его замыкание $K$ в полном пространстве компактно (полнота существенна).

$$P(K^c)\leqslant P\Big(\bigcup_{n\geqslant 1}\Big(\bigcup_{l=1}^{m_n} A_l^{(n)}\Big)^c\Big)\leqslant\sum_{n\geqslant 1}\Big[1-P\Big(\bigcup_{l=1}^{m_n} A_l^{(n)}\Big)\Big]\leqslant$$

$$< \sum_{n \geqslant 1} \varepsilon/2^n = \varepsilon.$$

**110.** В силу задач 108 и 109 существуют замкнутое множество $F$ и компакт $K$, для которых $B \supset F$, $P(B \setminus F) < \varepsilon/2$, $P(K^c) < \varepsilon/2$. Для компакта $K_1 = K \cap F$ имеем $B \supset K_1$, $P(B \setminus K_1) \leqslant P(B \setminus F) + P(K^c) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

**111.** $P(\text{ПБ} \mid \text{Н}) = \dfrac{P(\text{ПНБ})}{P(\text{Н})} = \dfrac{P(\text{ПН}) \cdot P(\text{Б} \mid \text{ПН})}{P(\text{Н})} =$

$= P(\text{П} \mid \text{Н}) \cdot P(\text{Б} \mid \text{ПН}) = P(\text{П} \mid \text{Н}) \cdot P(\text{Б} \mid \text{Н})$,

так как $P(\text{Б} \mid \text{ПН}) = P(\text{Б} \mid \text{Н})$. Действительно, полагая $P(\xi_k = i_k \mid \xi_{k-1} = i_{k-1}) = \alpha_k$, имеем

$$P(\text{ПНБ}) = P(\xi_k = i_k \forall k \leqslant n) = P(\xi_n =$$
$$= i_n \mid \xi_k = i_k \forall k < n) \cdot P(\xi_k = i_k \forall k < n) = P(\xi_n =$$
$$= i_n \mid \xi_{n-1} = i_{n-1}) \cdot P(\xi_k = i_k \forall k \leqslant n-1) = \ldots$$
$$= \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot P(\xi_0 = i_0).$$

Аналогично

$$P(\text{ПН}) = \prod_{k=1}^{t} \alpha_k \cdot P(\xi_0 = i_0);$$

$$P(\text{НБ}) = \prod_{k=t+1}^{n} \alpha_k \cdot P(\text{Н}).$$

Это дает

$$P(\text{Б} \mid \text{ПН}) = \frac{P(\text{ПНБ})}{P(\text{ПН})} = \prod_{k=t+1}^{n} \alpha_k = \frac{P(\text{НБ})}{P(\text{Н})} = P(\text{Б} \mid \text{Н}).$$

**112.** а) $\{\eta_0, \eta_1, \ldots\}$ не является цепью Маркова, так как, например,

$$P(\eta_2 = -1 \mid \eta_0 = -1, \eta_1 = 0) \neq P(\eta_2 = -1 \mid \eta_1 = 0).$$

Действительно, положим

$$A = \{\eta_2 = -1\} = \{\xi_2 = -1, \xi_3 = -1\},$$
$$B = \{\eta_0 = -1, \eta_1 = 0\} = \{\xi_0 = -1, \xi_1 = -1, \xi_2 = 1\},$$
$$AB = \varnothing,$$

$C=\{\eta_1=0\}=\{\xi_1=-1,\ \xi_2=1\}\cup\{\xi_1=1,\ \xi_2=-1\}$,
$AC=\{\xi_1=1,\ \xi_2=-1,\ \xi_3=-1\}$,

откуда

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=0\neq\frac{1}{4}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{P(AC)}{P(C)}=P(A|C).$$

б) $\{\zeta_0,\ \zeta_1,\ \ldots\}$ является цепью Маркова. Действительно, достаточно проверить независимость сл. в. $\zeta_0,\ \zeta_1,\ \ldots$. Так как $\xi_k^2=1$, то из $\zeta_k=\xi_k\xi_{k+1}=i_k\forall k=0,\ 1,\ \ldots,\ n$ следует $\xi_{k+1}=\xi_k i_k=\ldots=\xi_0 i_0\ldots i_k\forall k$. Поэтому $P(\zeta_0=i_0,\ \zeta_1=i_1,\ \ldots,\ \zeta_n=i_n)=P(\xi_1=\xi_0 i_0,\ \ldots,\ \xi_{n+1}=\xi_0 i_0\ldots i_n)=P(\xi_0=1,\ \xi_1=i_0,\ \ldots,\ \xi_{n+1}=i_0\ldots i_n)+P(\xi_0=-1,\ \xi_1=-i_0,\ \ldots,\ \xi_{n+1}=-i_0\ldots i_n)=2^{-(n+2)}+2^{-(n+2)}=2^{-(n+1)}=P(\zeta_0=i_0)\ldots P(\zeta_n=i_n)$.

**113.** Покажем сначала, что $P(\text{Б}\mid\text{НП})=P(\text{Б}\mid\text{Н})$, где $\text{Б}=\{\xi_{n+1}\in A\}$ для $A\subset E$, $\text{Н}=\{\xi_n=i_n\}$ для $i_n\in E$, $\text{П}=\{\xi=(\xi_0,\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_{n-1})\in B\}$ для $B\subset E$, если только $P(\text{НП})\neq 0$. Действительно,

$$P(\text{БНП})=\sum_{\alpha\in A}\sum_{\beta\in B}P(\xi_{n+1}=\alpha,\ \text{Н},\ \xi=\beta)=$$

$$=\sum_{\alpha\in A}\sum_{\beta\in B}P(\xi_{n+1}=\alpha\mid\text{Н},\ \xi=\beta)\cdot P(\text{Н},\ \xi=\beta)=$$

$$=\sum_{\alpha\in A}P(\xi_{n+1}=\alpha|\text{Н})\cdot\sum_{\beta\in B}P(\text{Н},\ \xi=\beta)=P(\text{Б}\mid\text{Н})\cdot P(\text{НП}).$$

Теперь положим

$$\text{П}=\{\eta_0=i_0,\ \ldots,\ \eta_{n-1}=i_{n-1}\}=\{\xi_0\in B_0,\ \ldots,\ \xi_{n-1}\in B_{n-1}\},$$

где $B_k=\{1,2\}$, если $i_k=1$, и $B_k=\{3\}$, если $i_k=2$. Покажем, что $P(\eta_{k+1}=j\mid\eta_n=i,\ \text{П})=q_{ij}$ не зависит от П и

$$Q=\{q_{ij}\}=\begin{bmatrix}\alpha & 1-\alpha\\ 2/3 & 1/3\end{bmatrix}.$$

$$P(\eta_{n+1}=1,\ \eta_n=1,\ \text{П})=P(\eta_{n+1}=1,\ \xi_n=1,\ \text{П})+$$
$$+P(\eta_{n+1}=1,\ \xi_n=2,\ \text{П})=P(\eta_{n+1}=1\mid\xi_n=1)\times$$
$$\times P(\xi_n=1,\ \text{П})+P(\eta_{n+1}=1\mid\xi_n=2)\cdot P(\xi_n=2,\ \text{П})=$$
$$=\alpha P(\xi_n=1,\ \text{П})+\alpha P(\xi_n=2,\ \text{П})=\alpha P(\eta_n=1,\ \text{П}),$$

откуда

$$P(\eta_{n+1}=1\,|\,\eta_n=1,\ \Pi)=\alpha,$$

$$P(\eta_{n+1}=2\,|\,\eta_n=1,\quad \Pi)=1-P(\eta_{n+1}=1\,|\,\eta_n=1,\ \Pi)=$$

$$=1-\alpha,$$

$$P(\eta_{n+1}=2\,|\,\eta_n=2,\ \Pi)=P(\xi_{n+1}=3\,|\,\xi_n=3,\ \Pi)=$$

$$=P(\xi_{n+1}=3\,|\,\xi_n=3)=1/3,$$

$$P(\eta_{n+1}=1\,|\,\eta_n=2,\quad \Pi)=1-P(\eta_{n+1}=2\,|\,\eta_n=2,\quad \Pi)=$$

$$=1-1/3=2/3.$$

Другое решение связано со следующим представлением (с точностью до эквивалентности сл. в.)

$$\xi_{n+1}=g(\xi_n,\ \omega_n);\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;$$

где $\{\omega_n\}$ — последовательность независимых сл. в., равномерно распределенных в $[0,\ 1]$, а

$$g(1,\omega)=\begin{cases}2 \text{ при } \omega<\alpha\\ 3 \text{ при } \omega\geqslant\alpha\end{cases};\quad g(2,\omega)=\begin{cases}1 \text{ при } \omega<\alpha\\ 3 \text{ при } \omega\geqslant\alpha\end{cases};$$

$$g(3,\omega)=\begin{cases}1 \text{ при } \omega<1/3\\ 2 \text{ при } 1/3\leqslant\omega<2/3\\ 3 \text{ при } \omega\geqslant 2/3.\end{cases}$$

Тогда $\eta_{n+1}=h(\eta_n,\ \omega_n)$, где

$$h(1,\omega)=\begin{cases}1 \text{ при } \omega<\alpha\\ 2 \text{ при } \omega\geqslant\alpha\end{cases};\quad h(2,\omega)=\begin{cases}1 \text{ при } \omega<2/3\\ 2 \text{ при } \omega\geqslant 2/3\end{cases}$$

(так как $\eta_n=(\xi_n-2)^++1$, $\eta_{n+1}=(\xi_{n+1}-2)^++1=$ $=(g(\xi_n,\ \omega_n)-2)^++1=h((\xi_n-2)^++1,\ \omega_n)$).

**114.** Из уравнения Колмогорова—Чепмена следует, что

$$x_l^{(n)}=\sum_{j\geqslant 0}p_{ij}^{k\cdot s}x_j^{(n-k)},\quad k=0,\ 1,\ \ldots\ n.$$

Теперь

$$x_i^{(n+1)}=\sum_{j\in E}p_{ij}^{(n-1)s}x_j^{(2)}=\sum_{j\in E_0}p_{ij}^{(n-1)s}x_j^{(2)}+\sum_{j\in E_0^c}p_{ij}^{(n-1)s}x_j^{(2)}=$$

$$=\sum_{j\in E_0}p_{ij}^{(n-1)s}x_j^{(2)}+\sum_{j\in E_0^c}p_{ij}^{(n-1)s}\sum_{k\in E}p_{jk}^{s}x_k^{(1)}\leqslant\sum_{j\in E_0}p_{ij}^{(n-1)s}x_j^{(2)}+$$

$$+\sum_{j\in E_0^c} p_{ij}^{(n-1)s}(x_j-\varepsilon)=\sum_{j\in E_0} p_{ij}^{(n-1)s}(x_j^{(2)}-x_j+\varepsilon)+$$

$$+\sum_{j\in E} p_{ij}^{(n-1)s}(x_j-\varepsilon)=x_i^{(n)}+\sum_{j\in E_0} p_{ij}^{(n-1)s}(x_j^{(2)}-x_j+\varepsilon)-$$

$$-\varepsilon\leqslant\ldots\leqslant x_i^{(2)}+\sum_{j\in E_0}(p_{ij}^{(n-1)s}+\ldots+p_{ij}^{1\cdot s})(x_j^{(2)}-x_j+\varepsilon)-$$

$$-(n-1)\varepsilon.$$

Откуда

$$0\leqslant\frac{x_i^{(2)}}{n-1}+\sum_{j=0}^{i_0}\frac{1}{n-1}(p_{ij}^{1\cdot s}+\ldots+p_{ij}^{(n-1)s})(x_j^{(2)}-x_j+\varepsilon)-\varepsilon.$$

В силу п. 3° предельной теоремы 1 о цепях Маркова, если не существует стационарного распределения, то $p^t{}_{ij}\to 0$, $t\to\infty$, откуда

$$\frac{1}{n-1}(p_{ij}^{1\cdot s}+\ldots+p_{ij}^{(n-1)s})\to 0,\quad n\to\infty,$$

переходя к пределу при $n\to\infty$ в полученном выше неравенстве получим $0\leqslant-\varepsilon$, что невозможно.

**115.** В случае 1 указания к задаче $\xi_n=\nu_n$, $n\geqslant 1$, $\pi_j=P(\xi_n=j)=q_j$, $j=0,1$, $\{\pi_j\}$ — стационарное распределение (как предельное). В случае 2 цепь неприводима и сжимаема. В самом деле, $q_0>0$ и $q_m>0$ при $m\geqslant 2$ (считаем $m$ наименьшим с таким свойством). Следовательно, $p_{00}\geqslant P(\nu_n=0)=q_0>0$, $p_{i\,i-1}\geqslant P(\nu_n=0)=q_0>0$, $i\geqslant 1$, $p_{0m}\geqslant P(\nu_n=m)=q_m>0$, $p_{i\,i+m-1}\geqslant P(\nu_n=m)=q_m>0$, $i\geqslant 1$. Пусть $0\leqslant i<j$. Покажем, что существует $t$ такое, что $p^t_{0i}>0$, $p^t_{0j}>0$. Пусть $k\geqslant 1$ таково, что $m+(m-1)k>j$. Тогда при $t=1+k+m+k(m-1)-i$ имеем

$$p^t_{0,i}\geqslant p_{0,m}(p_{m,m+(m-1)}\cdots$$

$$\cdots p_{m+(k-1)(m-1),m+k(m-1)})(p_{m+k(m-1),m+k(m-1)-1}\cdots$$

$$\cdots p_{i+1,i})>0,\quad p^t_{0,j}\geqslant(p_{0,0})^{i-t}p_{0,m}(p_{m,m+(m-1)}\cdots$$

$$\cdots p_{m+(k-1)(m-1),m+k(m-1)})(p_{m+k(m-1),\,m+k(m-1)-1}\cdots$$

$$\cdots p_{j+1,j})>0.$$

Следовательно, цепь сжимаема (здесь использовано

неравенство, вытекающее из уравнения Колмогорова—Чепмена:

$$p^{t}_{i,i_{t+1}} \geqslant p_{i,i_1} p_{i_1,i_2} \ldots p_{i_t i_{t+1}}).$$

Учитывая $p^{t}_{i0} \geqslant p_{i\,i-1} \ldots p_{10} > 0$, $i \geqslant 0$, имеем при $0 \leqslant i < j$:

$$p^{j+t}_{ij} \geqslant p^{t}_{i0}\, p^{t}_{0j} > 0,\ p^{j-t}_{ji} \geqslant p_{j\,j-1} \ldots p_{t+1\,t} > 0;$$

при $i = j > 0$:

$$p^{i+t}_{ii} \geqslant p^{t}_{i0}\, p^{t}_{0i} > 0;$$

при $i = j = 0$:

$$p_{00} > 0.$$

Следовательно, цепь неприводима.

Теперь в соответствии с указанием воспользуемся предыдущей задачей. Проверим выражение для $E(\xi_{n+1} \mid \xi_n = i)$. При $i = 0$

$$E(\xi_{n+1} \mid \xi_n = i) = E\nu_{n+1} = \rho.$$

При $i > 0$

$$E(\xi_{n+1} \mid \xi_n = i) = (i-1)^{+} + E\nu_{n+1} = i - 1 + \rho.$$

**116.** Для $\pi_i = 1/m$ имеем

$$\sum_i \pi_i p_{ij} = \frac{1}{m} \sum_i p_{ij} = \frac{1}{m} = \pi_j.$$

**117.** Проходит решение предыдущей задачи, если заменить $p_{ij}$ на $p^{t}_{ij}$.

**118.** 1) Так как $\sum_{i=0}^{N} p^{n}_{ij} \leqslant 1 \ \forall n, N$, то при $n \to \infty$ получим $\sum_{i=0}^{N} \pi_i \leqslant 1$ и, значит, $\sum_{i \geqslant 0} \pi_i \leqslant 1$. Покажем, что $\pi_j = \sum_k \pi_k p_{kj}$. Согласно уравнению Колмогорова—Чепмена, $p^{n+1}_{ij} = \sum_k p^{n}_{ik} \cdot p_{kj}$ и, в частности, $p^{n+1}_{ij} \geqslant \sum_{k=0}^{N} p^{n}_{ik} \cdot p_{kj}$, что при $n \to \infty$ дает $\pi_j \geqslant \sum_{k=0}^{N} \pi_k p_{kj}$ и, значит, $\pi_j \geqslant \sum_k \pi_k p_{kj}$.

Далее, так как

$$\sum_j \left(\pi_j - \sum_k \pi_k p_{kj}\right) = 0$$

и слагаемые ряда неотрицательны, то они равны нулю.

2) Покажем сначала, что

$$\lim_{n\to\infty} \sum_i c_i p_{ij}^n = \pi_j \cdot \sum_i c_i \quad \forall j$$

для любой последовательности неотрицательных чисел $\{c_i\}$, $\sum_i c_i < \infty$. Действительно, так как $\sum_i c_i < \infty$ и $|p_{ij}^n - \pi_j| \leqslant 1$, то $\forall \varepsilon > 0 \exists N$, что $\left|\sum_{i>N} c_i (p_{ij}^n - \pi_j)\right| < \varepsilon$.

Тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\sum_i c_i (p_{ij}^n - \pi_j)\right| \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\sum_{i=0}^{N} c_i (p_{ij}^n - \pi_j)\right| +$$

$$+ \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\sum_{i>N} c_i (p_{ij}^n - \pi_j)\right| \leqslant 0 + \varepsilon = \varepsilon.$$

Положим $\Sigma \pi_i = p$. Допустим, что $0 < p < 1$, и положим $c_i = \pi_i / p$. Тогда $\sum c_i = 1$, $\sum_i c_i p_{ij} = c_j$, откуда $\sum_i c_i p_{ij}^n = c_j$. Следовательно,

$$c_j = \lim_{n\to\infty} \sum_i c_i p_{ij}^n = \pi_j \Sigma c_i = \pi_j,$$

откуда $p = \Sigma \pi_j = \Sigma c_j = 1$, что невозможно.

3) Выше показано, что если $c_i$ — стационарное распределение, то $c_j = \pi_j$. Тем самым стационарное распределение единственно и $c_j = 0$ в случае $\pi_j = 0$.

**119.** (Приводимое решение основано на следующей задаче 120.) Так как $p_{ij}^n \to \pi_j$ и число состояний конечно, то существуют целое число $s \geqslant 1$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что $q_{ij} = p_{ij}^s \geqslant \varepsilon > 0 \ \forall\, i, j$. Рассмотрим теперь однородную марковскую цепь с матрицей переходных вероятностей $Q = \{q_{ij}\}$ за один шаг. Согласно задаче 120

$\sum_j |q_{ij}^k - \pi_j| \leqslant 2(1-\varepsilon)^k \ \forall\, k \geqslant 1, \ \forall\, i$, где $q_{ij}^k = p_{ij}^{ks}$ — вероятность перехода из $i$ в $j$ за $k$ шагов новой цепи (в задаче 120 в качестве начальных распределений $\{\bar{p}_i^0\}$ и $\{p_i^0\}$ следует выбрать $p_j^0 = \delta_{ij}$ и $p_j^0 = \pi_j$). Теперь из $|P'^r x| \leqslant |x| \ \forall r = 1, 2, \ldots$, где норма вектора-столбца $x = (x_1, \ldots, x_m)'$ определяется как $|x| = \sum_1^m |x_j|$, имеем при $n = ks + r$, $0 \leqslant r < s$, что для $x = (\delta_{i1}, \ldots, \delta_{im})'$ и $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_m)'$ выполнено

$$\sum_j |p_{ij}^n - \pi_j| = |P'^n x - \pi| = |P'^n (x - \pi)| =$$

$$= |P'^r \cdot P'^{ks}(x - \pi)| \leqslant |P'^{ks}(x - \pi)| =$$

$$= \sum_j |p_{ij}^{ks} - \pi_j| = \sum_j |q_{ij}^k - \pi_j| \leqslant 2(1-\varepsilon)^k = C\rho^n,$$

где $C = 2$, $0 < \rho = (1-\varepsilon)^{1/s} < 1$.

В частности,

$$|p_{ij}^n - \pi_j| \leqslant C\rho^n \quad \forall\, i, j, n.$$

**120.** Положим $\Delta_n = \sum_i |\bar{p}_i^n - p_i^n|$. Достаточно показать, что $\Delta_{n+1} \leqslant (1-\varepsilon)\Delta_n$, $n \geqslant 0$.

Отметим сначала, что если $B$ — некоторое подмножество состояний и $B^c \neq \varnothing$, то

$$\sum_{j \in B} p_{ij} \leqslant 1 - \varepsilon \quad \forall\, i.$$

Действительно, если $\sum_{j \in B} p_{ij} > 1 - \varepsilon$ для некоторого $i$ и $j_0 \in B^c$, то с учетом $p_{ij_0} \geqslant \varepsilon$ получаем

$$1 = \sum_j p_{ij} \geqslant \sum_{j \in B} p_{ij} + p_{ij_0} > (1 - \varepsilon) + \varepsilon = 1.$$

Обозначим $A^+ = \{i : \bar{p}_i^n - p_i^n \geqslant 0\}$, далее $n$ фиксировано. Если $A^+ = \varnothing$ или $A^- = \varnothing$, то $\bar{p}_i^n = p_i^n \ \forall\, i$. Поэтому рассмотрим случай, когда $A^+ \neq \varnothing$ и $A^- \neq \varnothing$. Имеем $\Delta_{n+1} = \sum_j |\bar{p}_j^{n+1} - p_j^{n+1}| = \sum_j \left| \sum_i (\bar{p}_i^n - p_i^n) p_{ij} \right| =$

$$= \sum_j \Big| \sum_i \varepsilon_{ij} \Big| = \sum_j \Big| \sum_{i \in A^+} \varepsilon_{ij} + \sum_{i \in A^-} \varepsilon_{ij} \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_j \max \Big( \sum_{i \in A^+} |\varepsilon_{ij}|, \sum_{i \in A^-} |\varepsilon_{ij}| \Big)$$

и суммирование по $j$ производится по множеству $B^+ \cup B^-$, где

$$B^{\pm} = \Big\{ j : \sum_{i \in A^+} |\varepsilon_{ij}| \gtrless \sum_{i \in A^-} |\varepsilon_{ij}|, \text{ т. е. } \sum_i \varepsilon_{ij} \gtrless 0 \Big\}.$$

Это дает при $B^+ \neq \varnothing$ и $B^- \neq \varnothing$, что

$$\Delta_{n+1} \leqslant \sum_{j \in B^+} \sum_{i \in A^+} |\varepsilon_{ij}| + \sum_{j \in B^-} \sum_{i \in A^-} |\varepsilon_{ij}| \leqslant \sum_{i \in A^+} \sum_{j \in B^+} |\varepsilon_{ij}| +$$

$$+ \sum_{i \in A^-} \sum_{j \in B^-} |\varepsilon_{ij}| \leqslant (1-\varepsilon) \sum_{i \in A^+} |\bar{p}_i^n - p_i^n| +$$

$$+ (1-\varepsilon) \sum_{i \in A^-} |\bar{p}_i^n - p_i^n| \leqslant (1-\varepsilon) \sum_i |\bar{p}_i^n - p_i| = (1-\varepsilon)\Delta_n.$$

Если же $B^- = \varnothing$, то $\sum_i \varepsilon_{ij} \geqslant 0 \ \forall j$, и, так как $\sum_j \Big( \sum_i \varepsilon_{ij} \Big) = 0$, это дает $\sum_i \varepsilon_{ij} = 0 \ \forall j$, т. е. $B^+ = \varnothing$.

Аналогично, если $B^+ = \varnothing$, то $B^- = \varnothing$. Но в случае $B^+ = \varnothing = B^-$ имеем

$$\Delta_{n+1} = \sum_j \Big| \sum_i \varepsilon_{ij} \Big| = 0 \leqslant (1-\varepsilon)\Delta_n.$$

Отметим, что доказательство не использует конечность множества состояний, но для бесконечного числа состояний условие $\min_{i,j} p_{ij} \geqslant \varepsilon > 0$ не может выполняться.

## § 2. ПРОЦЕССЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Пусть $\{z_k : k \geqslant 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных неотрицательных

сл. в. Положим

$$t_0=0, \quad t_n=z_1+\ldots+z_n, \quad n\geqslant 1$$

$$\nu(t)=\sup\{n: t_n<t\}, \quad t\geqslant 0.$$

Процесс $\{\nu(t),\ t\geqslant 0\}$ называется **рекуррентным процессом восстановления**, определяемым ф. р. $A(x)=P(z_k<x)$.

Основное предположение: $P(z_k=0)<1$.

В этом случае $\forall t\ \exists$ момент любого порядка сл. в. $\nu(t)$. Функция $H(t)=E\nu(t)$, $t\geqslant 0$, называется **функцией восстановления** и удовлетворяет уравнению восстановления

$$H(t)=A(t)+\int_0^t H(t-x)\,dA(x).$$

Отметим, что

$$H(t)=\sum_{n\geqslant 1} A_n(t),$$

где $A_n(t)=P(t_n<t)$.

Основное содержание теории процессов восстановления составляют следующие три утверждения.

**T1** (элементарная теорема восстановления).

$$\frac{H(t)}{t}\to a \text{ при } t\uparrow\infty, \text{ где } a^{-1}=\int_0^\infty x\,dA(x)\leqslant\infty.$$

**T2** (теорема Блекуэлла). Если $A$ — неарифметическое распределение, то для всякого числа $h$

$$H(t+h)-H(t)\to ah \text{ при } t\uparrow\infty.$$

Точка $x$ называется **точкой роста** ф. р. $A$, если для любых чисел $a$ и $b$ таких, что $a<x<b$, выполнено $A(b)-A(a)>0$. Распределение $A$ называется **арифметическим** (или решетчатым), если существует число $\lambda>0$ такое, что всякая точка роста ф. р. $A$ кратна $\lambda$, т. е. имеет вид $n\lambda$, где $n$ — целое число. Если такого числа $\lambda$ не существует, то распределение $A$ называется **неарифметическим**. Отметим, что арифметическое распределение соответствует распределению такой сл. в., которая принимает (с вероятностью 1) лишь значения вида $n\lambda$; $\lambda>0$, $n$ — целое число.

Введем понятие непосредственно интегрируемой по Риману функции на $[0, \infty)$. Пусть $Q$ — измеримая по Борелю числовая функция, определенная на $[0, \infty)$. Для числа $h>0$ обозначим через $m_k$ и $M_k$ нижнюю и верхнюю грани функции $Q$ в промежутке $(k-1)h \leqslant x < kh$, $k \geqslant 1$. Предположим, что ряды

$$s = h\sum_{k\geqslant 1} m_k \text{ и } S = h\sum_{k\geqslant 1} M_k$$

сходятся абсолютно. Скажем, что функция $Q$ **непосредственно интегрируема по Риману** на $[0, \infty)$, если $S-s \to 0$ при $h \downarrow 0$. В этом случае положим

$$\int_0^\infty Q(t)\,dt = \lim_{h\downarrow 0} s = \lim_{h\downarrow 0} S.$$

Напомним, что обычный интеграл Римана на $[0, \infty)$ определяется как предел интеграла Римана на $[0, a]$ при $a \to +\infty$. Для функции $Q$, равной нулю вне некоторого конечного отрезка, непосредственная интегрируемость совпадает с обычной интегрируемостью по Риману. То же самое верно для монотонных функций $Q$.

**Т3** (узловая теорема восстановления). Если $Q$ есть функция непосредственно интегрируемая по Риману на $[0, \infty)$ и $A$ — неарифметическое распределение, то

$$\int_0^t Q(t-x)\,dH(x) \to a\int_0^\infty Q(x)\,dx \text{ при } t \uparrow \infty.$$

**Следствие.** В условиях теоремы 3 если $W$ — решение уравнения

$$W = Q + A * W; \quad W(x) = 0 \text{ при } x<0,$$

где $A * W$ — свертка Лебега — Стилтьеса функций $A$ и $W$, т. е.

$$(A * W)(t) = \int_0^t A(t-x)\,dW(x) = \int_0^t W(t-x)\,dA(x),$$

то

$$\lim_{t\to\infty} W(t) = a\int_0^\infty Q(x)\,dx.$$

## ЗАДАЧИ 121—130

**121.** Показать, что

$$\{\nu(t) \geqslant n\} = \{z_1 + \ldots + z_n < t\}, \quad n \geqslant 1;$$

$$P\{\nu(t) = n\} = P_n(t) = A_n(t) - A_{n+1}(t), \quad n \geqslant 0.$$

**122.** Доказать, что

$$P(z_k = 0) < 1$$

равносильно

$$P\{\nu(t) < \infty\} = 1 \quad \forall t > 0.$$

**123.** Пусть $A(x) = 1 - e^{-ax}$, $x \geqslant 0$; $a > 0$. В этом случае процесс восстановления $\{\nu(t),\ t \geqslant 0\}$ называется пуассоновским (с интенсивностью $a$). Показать, что

$$P_n(t) = \frac{(at)^n}{n!} e^{-at}, \quad t \geqslant 0; \quad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots.$$

**124.** Пусть

$$A(x) = \int_0^{cx} \frac{u^{r-1}}{(r-1)!} e^{-u} du, \quad x \geqslant 0, \quad c > 0.$$

В этом случае процесс восстановления называется процессом восстановления Эрланга порядка $r \geqslant 1$ ($r$ — целое число). Показать, что

$$P_n(t) = \sum_{k=nr}^{nr+r-1} \frac{c^k}{k!} e^{-ct}.$$

Указание. Сл. в., имеющая распределение Эрланга $r$-го порядка, представляется в виде суммы независимых одинаково распределенных по экспоненциальному закону сл. величин.

**125.** Пусть для числа $c>0$

$$P(z_k=c)=p \text{ и } P(z_k=0)=q=1-p.$$

Найти производящую функцию сл. в. $\nu(t)$ и функцию восстановления $H(t)$.

**126.** Рассмотрим последовательность $\{z_k : k\geqslant 1\}$ неотрицательных сл. в. и положим

$$t_0=0, \quad t_n=z_1+\ldots+z_n, \quad n\geqslant 1;$$

$$\nu(t)=\sup\{n : t_n<t\}, \quad t\geqslant 0.$$

Доказать, что соотношения

$$\frac{1}{n}\sum_1^n z_k \xrightarrow{P} 1/a \quad \text{при } n\to\infty$$

и

$$\frac{\nu(t)}{t}\xrightarrow{P} a \quad \text{при } t\to\infty$$

эквивалентны.

**127.** Пусть $A$ — неарифметическое распределение и $\mu_2=\int_0^\infty x^2 dA(x)<\infty$. Показать, что

$$H(t)-at\to\frac{a^2\mu_2}{2}-1 \quad \text{при } t\to\infty.$$

Указание. Полагая

$$W(t)=H(t)+1-at \text{ при } t\geqslant 0 \text{ и } Q(t)=$$

$$=a\int_t^\infty [1-A(u)]\,du,$$

имеем

$$W=Q+A*W.$$

Кроме того,

$$a^{-1}=\int_0^\infty x\,dA(x)=\int_0^\infty [1-A(x)]\,dx, \quad \mu_2=\int_0^\infty [1-A(x)]\,dx^2.$$

**128.** Начиная с момента $t=0$ на остановку прибывают автобусы через интервалы времени длительности $z_1, z_2, \ldots$. Предположим, что сл. в. $z_1, z_2, \ldots$ независимы, одинаково распределены с функцией распределения

$$A(x) = P(z_k < x),\ x \geqslant 0;\quad P(z_k = 0) < 1;$$

$$a^{-1} = \int_0^\infty x\, dA(x) < \infty.$$

Через $\xi(t)$ обозначим время ожидания прибытия автобуса, начиная с момента $t \geqslant 0$. Показать, что если $A$ — неарифметическое распределение, то существует

$$\lim_{t\to\infty} P\{\xi(t) < x\} = a\int_0^\infty [1 - A(u)]\, du.$$

Указание. По формуле полной вероятности

$$P\{\xi(t) < x\} = \sum_{n\geqslant 0} P\{t_n \leqslant t < t_{n+1},\ \xi(t) < x\},$$

откуда, учитывая, что

$$\xi(t) = t_{n+1} - t = z_{n+1} - (t - t_n) \text{ для } t_n \leqslant t < t_{n+1}$$

и

$$P\{t_n \leqslant t < t_{n+1},\ \xi(t) < x \mid t_n = u\} =$$
$$= P\{u \leqslant t < u + z_{n+1},\ z_{n+1} - (t-u) < x\} =$$
$$= P\{(t-u) < z_{n+1} < x + (t-u)\} = Q(t-u) =$$
$$= \begin{cases} A(x+t-u) - A(t-u) & \text{для } t-u \geqslant 0, \\ 0 & \text{для } t-u < 0, \end{cases}$$

имеем

$$P\{\xi(t) < x\} = P\{0 \leqslant t < t_1,\ \xi(t) < x\} +$$
$$+ \sum_{n\geqslant 1} \int_0^t Q(t-u)\, dA_n(u) = g(t) + \int_0^t Q(t-u)\, dH(u),$$

где

$$0 \leqslant g(t) = P\{0 \leqslant t < t_1,\ \xi(t) < x\} \leqslant P\{t < z_1\} \to 0 \text{ при } t \to \infty.$$

**129.** Пусть $Q$ — измеримая по Борелю и интегрируемая по Лебегу функция на $[0, \infty)$. Показать, что

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \int_0^t Q(t-u)\, dH(u) \right\} dt = a\int_0^\infty Q(t)\, dt.$$

Указание. Изменением порядка интегрирования убедиться, что

$$\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^t Q(t-u)\,dH(u)\,dt = \frac{H(T)}{T}\int_0^T Q(v)\,dv + \varepsilon_T,$$

$$|\varepsilon_T| \leqslant \frac{H(T)}{T}\int_{T-u_0}^{\infty}|Q(v)|\,dv + \frac{H(u_0)}{T}\int_0^{\infty}|Q(v)|\,dv;\ 0\leqslant u_0\leqslant T.$$

**130.** Доказать, что для $h\geqslant 0$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T [H(t+h)-H(t)]\,dt = ah.$$

## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 121—130

**121.** Если $\omega$ — элементарное событие, то

$$\omega\in\{\nu(t)\geqslant n\}\Leftrightarrow\nu(t,\ \omega)\geqslant n\Leftrightarrow t_n(\omega)<t\Leftrightarrow\omega\in\{t_n<t\}.$$

Эта эквивалентность верна как при $\nu(t,\ \omega)<+\infty$, так и при $\nu(t,\ \infty)=+\infty$.

Положим $A_n=\{t_n<t\}$, тогда $A_{n+1}\subset A_n$ и $B_n=\{\nu(t)=n\}=\{t_n<t,\ t_{n+1}\geqslant t\}=A_nA_{n+1}^c=A_n\setminus A_{n+1}$, что дает $P(B_n)=P(A_n)-P(A_{n+1})$ или $P_n(t)=A_n(t)-A_{n+1}(t)$.

**122.** Воспользуемся тем, что условие $P(z_1=0)<1$ обеспечивает существование всех моментов сл. в. $\nu(t)$ $\forall t>0$. Поэтому $P(z_1=0)<1\Rightarrow E\nu(t)<\infty\Rightarrow$ $\Rightarrow P\{\nu(t)<\infty\}=1$. С другой стороны, при $t>0$ имеем

$$P(z_1=0)=1\Rightarrow P(t_n<t)=1\,\forall n\Rightarrow P(t_k<t\,\forall k\leqslant n)=$$
$$=1\,\forall n\Rightarrow P(t_k<t\,\forall k)=1\Rightarrow P\{\nu(t)=+\infty\}=1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow P\{\nu(t)<\infty\}=0.$$

**123.** Применим индукцию (по числу $n$), воспользовавшись формулой $P_n(t)=A_n(t)-A_{n+1}(t)$ из задачи 121, которая дает $P_{n+1}=P_n*A$ (так как $A_n=A^{*n}$), где $*$ есть знак операции свертки Лебега — Стилтьеса. При $n=0$ имеем $P_0(t)=P\{\nu(t)=0\}=P\{z_1\geqslant t\}=$ $=1-A(t)=e^{-at}$. Далее,

$$P_{n+1}(t)=\int_0^t P_n(t-u)\,dA(u)=$$

$$= \int_0^t \frac{[a(t-u)]^n}{n!} e^{-a(t-u)} \cdot ae^{-au}\, du =$$

$$= \frac{a^{n+1}}{n!} e^{-at} \int_0^t (t-u)^n\, du = \frac{(at)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-at}.$$

**124.** Сл. в. $cz_k$ имеет гамма-распределение $G(r)$ и поэтому представляется в виде суммы $r$ независимых сл. в., имеющих экспоненциальное распределение $G(1)$. Следовательно, сл. в., имеющая указанное распределение Эрланга порядка $r$, представляется в виде суммы $r$ независимых сл. в., имеющих экспоненциальное распределение с параметром $c>0$. Если теперь $C_n$ есть ф. р. суммы $n$ независимых сл. в., имеющих экспоненциальное распределение с параметром $c$, то (см. задачи 121, 123)

$$P\{\nu(t)=n\} = P_n(t) = C_{nr}(t) - C_{(n+1)r}(t) =$$

$$= \sum_{k=nr}^{nr+r-1} [C_k(t) - C_{k+1}(t)] = \sum_{nr}^{nr+r-1} \frac{(ct)^k}{k!} e^{-ct}.$$

**125.** Пусть $lc<t\leqslant(l+1)c$, где $l$ — целое неотрицательное число. Величины $t_n$ принимают значения 0, $c$, $2c$, ..., и, следовательно,

$$\{\nu(t)=n\} = \{t_n<t\} \cap \{t_{n+1}\geqslant t\} = \{t_n = lc\} \cap \{z_{n+1}=c\}.$$

Событие $t_n=lc$ наступает, если ровно $l$ из величин $z_1, \ldots, z_n$ принимают значения $c$, вероятность чего равна $C_n^l p^l q^{n-l}$. Тем самым

$$P\{\nu(t)=n\} = P\{t_n=lc\}\, P\{z_{n+1}=c\} =$$

$$= C_n^l p^{l+1} q^{n-l},\ n = l, l+1, \ldots,$$

$$P\{\nu(t)-l=k\} = C_{k+l}^l p^{l+1} q^k,\ k = 0, 1, \ldots.$$

Таким образом, величина $\xi=\nu(t)-l$ имеет отрицательное биномиальное распределение $\mathrm{Bi}^-(l+1, p)$, откуда

$$Ez^{\nu(t)} = z^l Ez^\xi = z^l (p/(1-qz))^{l+1},$$

$$H(t) = l + E\xi = (l+q)/p.$$

**126.** Воспользуемся равенством (см. задачу 121):

$$\{\nu(t) \geqslant n\} = \{t_n < t\}, \quad t > 0.$$

Пусть $1/a > \varepsilon > 0$. Тогда

$$P\left(\frac{t_n}{n} < \frac{1}{a} - \varepsilon\right) = P\left\{\nu\left(\frac{n}{a} - n\varepsilon\right) \geqslant n\right\} =$$

$$= P\left\{\frac{\nu\left(\frac{n}{a} - n\varepsilon\right)}{\frac{n}{a} - n\varepsilon} \geqslant \frac{1}{\frac{1}{a} - \varepsilon} = a + \delta_1\right\},$$

или

$$P\left(\frac{t_n}{n} < \frac{1}{a} - \varepsilon\right) = P\left\{\frac{\nu(x_n)}{x_n} \geqslant a + \delta_1\right\}, \qquad (*)$$

где

$$x_n = nd_1, \; d_1 = \frac{1}{a} - \varepsilon > 0, \; \delta_1 = \frac{a^2\varepsilon}{1 - a\varepsilon} > 0.$$

Аналогично,

$$P\left(\frac{t_n}{n} \geqslant \frac{1}{a} + \varepsilon\right) = P\left\{\nu\left(\frac{n}{a} + n\varepsilon\right) < n\right\} =$$

$$= P\left\{\frac{\nu\left(\frac{n}{a} + n\varepsilon\right)}{\frac{n}{a} + n\varepsilon} < \frac{1}{\frac{1}{a} + \varepsilon} = a - \delta_2\right\},$$

или

$$P\left(\frac{t_n}{n} \geqslant \frac{1}{a} + \varepsilon\right) = P\left\{\frac{\nu(y_n)}{y_n} < a - \delta_2\right\}, \qquad (**)$$

где

$$y_n = nd_2, \; d_2 = \frac{1}{a} + \varepsilon > 0, \; \delta_2 = \frac{a^2\varepsilon}{1 + a\varepsilon} > 0.$$

Если теперь $\frac{\nu(t)}{t} \xrightarrow{P} a$, то правые части $(*)$ и $(**)$, а значит, и левые части сходятся к нулю. Поэтому при $n \to \infty$

$$P\left(\left|\frac{t_n}{n} - \frac{1}{a}\right| > \varepsilon\right) \leqslant P\left(\frac{t_n}{n} < \frac{1}{a} - \varepsilon\right) +$$

$$+ P\left(\frac{t_n}{n} \geqslant \frac{1}{a} + \varepsilon\right) \to 0,$$

т. е. $t_n/n \xrightarrow{P} 1/a$.

Пусть теперь $t_n/n \xrightarrow{P} 1/a$, тогда левые части (*) и (**), а значит, и правые части сходятся к нулю. Покажем, что

$$P\left\{\frac{\nu(t)}{t} \geqslant a+\delta_1\right\} \to 0 \text{ при } t \to \infty.$$

Заметим, что $\forall t \geqslant 0$ $\exists$ (единственное) целое число $n \geqslant 0$ такое, что

$$x_n = nd_1 \leqslant t < (n+1)d_1 = x_{n+1}.$$

Поэтому из монотонности $\nu(t)$ имеем

$$P\left\{\frac{\nu(t)}{t} \geqslant a+\delta_1\right\} \leqslant P\left\{\frac{\nu(x_{n+1})}{x_n} \geqslant a+\delta_1\right\} =$$
$$= P\left\{\frac{\nu(x_{n+1})}{x_{n+1}} \geqslant \frac{x_n}{x_{n+1}}(a+\delta_1)\right\} =$$
$$= P\left\{\frac{\nu(x_{n+1})}{x_{n+1}} \geqslant \frac{n}{n+1}(a+\delta_1)\right\} \to 0$$

при $t \to \infty$ (тогда и $n \to \infty$). Аналогично,

$$P\left\{\frac{\nu(t)}{t} < a-\delta_2\right\} \leqslant P\left\{\frac{\nu(y_n)}{y_{n+1}} < a-\delta_2\right\} =$$
$$= P\left\{\frac{\nu(y_n)}{y_n} < \frac{n+1}{n}(a-\delta_1)\right\} \to 0,$$

где $n$ по $t$ выбирается из условия $y_n = nd_2 \leqslant t < nd_2 + d_2 = y_{n+1}$. Следовательно, при $0 < \delta \leqslant \min(\delta_1, \delta_2) = \delta_2$

$$P\left\{\left|\frac{\nu(t)}{t} - a\right| > \delta\right\} \leqslant P\left\{\frac{\nu(t)}{t} \geqslant a+\delta_1\right\} +$$
$$+ P\left\{\frac{\nu(t)}{t} < a-\delta_2\right\} \to 0,$$

т. е. $\dfrac{\nu(t)}{t} \xrightarrow{P} a$ при $t \to \infty$.

**127.** Воспользуемся следствием узловой теоремы восстановления. Полагая

$$W(t) = H(t) + 1 - at \text{ и } Q(t) = a\int_t^\infty [1 - A(u)]\,du$$

для $t \geqslant 0$, имеем $W = Q + A * W$. Действительно, записывая $W$ в виде $W = H + 1 - L$, где $1(t) = 1$, $L(t) = at$ при $t \geqslant 0$, и замечая, что $Q(0) = 1$, имеем

$$Q(t) + (A * W)(t) = 1 - a\int_0^t [1 - A(u)]\,du +$$

$$+ [A * H + A] - a\int_0^t A(t-x)\,dx =$$

$$= 1 - at + a\int_0^t A(u)\,du + H - a\int_0^t A(u)\,du = W(t).$$

Остается подсчитать $\int_0^\infty Q(x)\,dx$. Полагая $1 - A(u) = \bar{A}(u)$, имеем

$$\int_0^\infty Q(t)\,dt = a\int_0^\infty \left(\int_t^\infty \bar{A}(u)\,du\right) dt = a\int_0^\infty \bar{A}(u)\,du \int_0^u dt =$$

$$= a\int_0^\infty u\bar{A}(u)\,du = \frac{a}{2}\int_0^\infty \bar{A}(u)\,du^2 = \frac{a\mu_2}{2}.$$

Отметим общую формулу

$$\int_0^\infty x^n dA(x) = \int_0^\infty [1 - A(x)]\,dx^n, \quad n > 0,$$

(оба интеграла существуют одновременно), которая следует из формулы интегрирования по частям

$$\int_0^c x^n dA(x) = x^n A(x)\Big|_{0-0}^{c+0} - \int_0^c A(x)\,dx^n =$$

$$= \int_0^c [A(c+0) - A(x)]\,dx^n$$

и того, что $A(c) \uparrow 1$ при $c \uparrow \infty$.

**128.** Учитывая $P(t_n \uparrow \infty) = 1$, что следует из $P(\nu(t) < \infty) = 1$ $\forall t$ (см. задачу 122), в силу формулы полной вероятности имеем

$$P(\xi(t)<x)=\sum_{n\geqslant 0}\int_0^t P\{t_n<t\leqslant t_{n+1},\ \xi(t)<x\mid t_n=u\}\,dA_n(u).$$

Используя

$$\xi(t)=z_{n+1}-(t-t_n)\ \text{ для }\ t_n<t\leqslant t_{n+1},$$

получим

$$P\{t_n<t\leqslant t_{n+1},\ \xi(t)<x\mid t_n=u\}=P\{(t-u)\leqslant z_{n+1}<x+(t-u)\}=Q(t-u),$$

где

$$Q(y)=\begin{cases}A(x+y)-A(y) & \text{для } y\geqslant 0,\\ 0 & \text{для } y<0.\end{cases}$$

Отсюда

$$P\{\xi(t)<x\}=P\{t\leqslant t_1,\ \xi(t)<x\}+$$

$$+\sum_{n\geqslant 1}\int_0^t Q(t-u)\,dA_n(u)=g(t)+\int_0^t Q(t-u)\,dH(u),$$

где

$$0\leqslant g(t)=P\{t\leqslant t_1,\ \xi(t)<x\}\leqslant P\{t\leqslant z_1\}\to 0 \text{ при } t\to\infty.$$

Функция $Q$ непосредственно интегрируема по Риману (как разность монотонных интегрируемых функций), что позволяет применить узловую теорему восстановления, в силу которой

$$P\{\xi(t)<x\}\to a\int_0^\infty Q(y)\,dy=a\int_0^\infty[1-A(y)]\,dy-$$

$$-a\int_0^\infty[1-A(x+y)]\,dy=a\int_0^x[1-A(y)]\,dy.$$

**129.** Изменяя порядок интегрирования, получим

$$\frac{1}{T}\int_0^T\left(\int_0^t Q(t-u)\,dH(u)\right)dt=\frac{1}{T}\int_0^T\left(\int_u^T Q(t-u)\,dt\right)dH(u)=$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T\left(\int_0^{T-u}Q(v)\,dv\right)dH(u)=$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^T Q(v)\,dv dH(u) + \varepsilon_T = \frac{H(T)}{T}\int_0^T Q(v)\,dv + \varepsilon_T,$$

где

$$-\varepsilon_T = \frac{1}{T}\int_0^T\left(\int_{T-u}^T Q(v)\,dv\right)dH(u) =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^{u_0}\left(\int_{T-u}^T Q(v)\,dv\right)dH(u) +$$

$$+ \frac{1}{T}\int_{u_0}^T\left(\int_{T-u}^T Q(v)\,dv\right)dH(u),$$

и, значит, при $0 \leqslant u_0 \leqslant T$

$$|\varepsilon_T| \leqslant \frac{H(u_0)}{T}\int_0^\infty |Q(v)|\,dv + \frac{H(T)}{T}\int_{T-u_0}^\infty |Q(v)|\,dv.$$

Остается воспользоваться элементарной теоремой восстановления: $H(T)/T \to a$ при $T \uparrow \infty$ (при этом за счет выбора $u_0$ каждое из слагаемых в оценке справа для $|\varepsilon_T|$ может быть сделано произвольно малым числом при больших значениях $T$).

**130.** Полагая в предыдущей задаче

$$Q(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } 0 \leqslant t < h, \\ 0 \text{ при } \quad t \geqslant h, \end{cases}$$

получим

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T [H(t) - H(t-h)]\,dt = ah.$$

Остается сделать замену переменной интегрирования $t = u + h$.

### § 3. РЕГЕНЕРИРУЮЩИЕ ПРОЦЕССЫ

Если $\xi = \{\xi(t) : 0 \leqslant t < z\}$ есть случайный процесс на промежутке $[0, z)$ случайной длины $z$, то пара $(z, \xi)$ называется **циклом**. Пусть $\{(z_k, \xi_k) : k \geqslant 1\}$ — последовательность независимых стохастически эквивалент-

ных циклов. В частности, это означает, что последовательность $\{z_k : k \geqslant 1\}$ образует процесс восстановления

$$\nu(t) = \sup\{n : t_n < t\}; \quad t \geqslant 0;$$

$$t_0 = 0; \quad t_n = z_1 + \ldots + z_n, \quad n \geqslant 1.$$

По набору таких циклов $(z_k, \xi_k)$, $k \geqslant 1$, образуем случайный процесс $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, полагая

$$\xi(t) = \xi_k(t - t_{k-1}), \text{ если } t_{k-1} \leqslant t < t_k;$$

см. рис. 4.

Такой процесс $\{\xi(t), t \geqslant 0\}$ называется **регенерирующим**, а точки $\{t_k\}$ называются точками (моментами) регенерации.

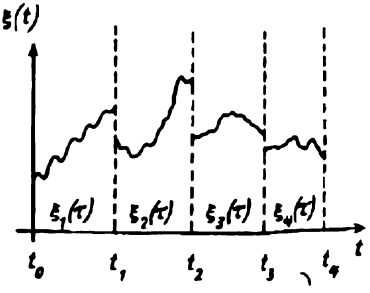


Рис. 4

Пусть $B$ — некоторое измеримое множество состояний процесса $\xi(t)$, $t \geqslant 0$. Цель теории регенерирующих процессов — указать условия существования

$$\lim_{t \to \infty} P\{\xi(t) \in B\} = P_B \qquad (*)$$

и способ его нахождения. В связи с этим положим

$$\mu_B(\tau) = P\{\xi_1(\tau) \in B, z_1 > \tau\}, \quad \tau \geqslant 0.$$

**Теорема.** Предположим, что ф. р. $A(x) = P(z_1 < x)$, $x \geqslant 0$, является неарифметической и $a^{-1} = \int_0^\infty x dA(x) = Ez_1 < \infty$, а функция $\tau \mapsto \mu_B(\tau)$ интегрируема по Риману на каждом конечном интервале. Тогда существует предел $(*)$ и

$$P_B = a \int_0^\infty \mu_B(\tau)\, d\tau.$$

### ЗАДАЧИ 131—134

**131.** Пусть периоды работы некоторого устройства чередуются с периодами его восстановления. Обозначим через $\{u_k : k \geqslant 1\}$ последовательность пе-

риодов работы устройства. Соответствующую последовательность периодов восстановления обозначим через $\{v_k\}$. Предположим, что сл. в. $\{u_k\}$ и $\{v_k\}$ независимы, а внутри каждой последовательности одинаково распределены. Пусть $\xi(t)=0$, если в момент $t$ устройство восстанавливается, и $\xi(t)=1$ в противном случае. Предполагая $Eu_1+Ev_1<\infty$, а распределение $A(x)=P(u_1+v_1<x)$ неарифметическим, показать, что

$$\lim_{t\to\infty} P\{\xi(t)=1\}=\frac{Eu_1}{Eu_1+Ev_1}.$$

Указание. $\xi(t)$ — регенерирующий процесс с моментами регенерации $t_1, t_2, \ldots$, где

$$t_k=z_1+\ldots+z_k, \quad z_k=u_k+v_k;$$

$$B=\{1\}, \quad \mu_B(t)=P\{\xi(t)=1,\ z_1>t\}=$$

$$=P(u_1>t,\ u_1+v_1>t)=P(u_1>t);$$

$$\int_0^\infty \mu_B(t)\,dt=\int_0^\infty P(u_1>t)\,dt=Eu_1.$$

**132.** Начиная с момента $t=0$ на остановку прибывают автобусы через интервалы времени длительности $z_1, z_2, \ldots$. Считаем, что сл. в. $z_1, z_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены

$$A(x)=P(z_k<x), \quad x\geqslant 0;$$

$$0<a^{-1}=\int_0^\infty x\,dA(x)<\infty.$$

Пусть $\xi(t)$ — время ожидания прибытия очередного автобуса, начиная с момента $t$; $\eta(t)$ — время отсутствия автобуса к моменту $t$. Отметим, что

$$\eta(t)=t-t_{\nu(t)}, \quad \xi(t)=t_{\nu(t)+1}-t.$$

Показать, что если $A$ — неарифметическое распределение, то

$$\lim_{t\to\infty} P\{\xi(t)\geqslant x,\ \eta(t)\geqslant y\}=a\int_{x+y}^\infty [1-A(u)]\,du.$$

Указание. В данном случае при $B=[x, \infty)\times[y, \infty)$

$$\mu_B(t)=P\{\xi(t)\geqslant x, \quad \eta(t)\geqslant y, \quad z_1>t\}=$$

$$= P(z_1 - t \geqslant x,\ t \geqslant y,\ z_1 > t) = P(z_1 \geqslant x + t,\ t \geqslant y) =$$

$$= \begin{cases} 1 - A(x+t) & \text{при } t \geqslant y, \\ 0 & \text{при } t < y. \end{cases}$$

**133.** (Продолжение.) Положим $\zeta(t) = \xi(t) + \eta(t)$. Отметим, что $\zeta(t) = z_{\nu(t)+1}$. Если $A$ — неарифметическое распределение, то

$$\lim_{t\to\infty} P\{\zeta(t) < x\} = A^*_1(x) = a\int_0^x [A(x) - A(t)]\,dt.$$

Указание. При $B = [0, x)$

$$\mu_B(t) = P(\zeta(t) < x,\ z_1 > t) = P(z_1 < x,\ z_1 > t) =$$

$$= A(x) - A(t+0) \text{ при } x > t,$$

$$\mu_B(t) = 0 \text{ при } x < t.$$

**134.** (Продолжение.) Показать, что

$$\lim_{t\to\infty} E\zeta(t) = \int_0^\infty x\,dA^*(x) = a\mu_2,\ \mu_2 = \int_0^\infty x^2\,dA(x).$$

**РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 131—134**

**131.** $\{\xi(t) : t \geqslant 0\}$ — регенерирующий процесс с моментами регенерации $t_1, t_2, \ldots$, где $t_k = z_1 + \ldots + z_k$, $z_k = u_k + v_k$. Положим $B = \{1\}$,

$$\mu_B(t) = P\{\xi(t) = 1,\ z_1 > t\} = P(u_1 > t,\ u_1 + v_1 > t) =$$

$$= P(u_1 > t).$$

Согласно предельной теореме для регенерирующих процессов

$$\lim_{t\to\infty} P\{\xi(t) \in B\} = a\int_0^\infty \mu_B(t)\,dt,$$

где

$$a^{-1} = Ez_1 = Eu_1 + Ev_1.$$

Кроме того,

$$\int_0^\infty \mu_B(t)\,dt = \int_0^\infty P(u_1 > t)\,dt = Eu_1.$$

132. Процесс $\zeta(t)=\{\xi(t),\ \eta(t)\}$, $t\geqslant 0$, является регенерирующим с моментами регенерации $t_1,\ t_2,\ \ldots$. Положим $B=[x,\ \infty)\times[y,\ \infty)$,

$$\mu_B(t)=P\{\xi(t)\in B,\ z_1>t\}=P\{\xi(t)\geqslant x,\ \eta(t)\geqslant y,\ z_1>t\}=$$
$$=P(z_1-t\geqslant x,\ t\geqslant y,\ z_1>t)=P(z_1\geqslant x+t) \text{ при } t\geqslant y,$$

т. е.

$$\mu_B(t)=\begin{cases}1-A(x+t) & \text{при } t\geqslant y,\\ 0 & \text{при } t<y.\end{cases}$$

Согласно предельной теореме для регенерирующих процессов

$$\lim_{t\to\infty} P\{\zeta(t)\in B\}=a\int_0^\infty \mu_B(t)\,dt=a\int_y^\infty [1-A(x+t)]\,dt=$$
$$=a\int_{x+y}^\infty [1-A(u)]\,du.$$

133. Процесс $\{\zeta(t):t\geqslant 0\}$ является регенерирующим с моментами регенерации $t_1,\ t_2,\ \ldots$. Положим $B=[0,\ x)$,

$$\mu_B(t)=P\{\zeta(t)\in B,\ z_1>t\}=P(z_1<x,\ z_1>t)=$$
$$=\begin{cases}A(x)-A(t+0) & \text{при } x>t,\\ 0 & \text{при } x\leqslant t.\end{cases}$$

Согласно предельной теореме для регенерирующих процессов

$$\lim_{t\to\infty} P\{\zeta(t)\in B\}=a\int_0^\infty \mu_B(t)\,dt=$$
$$=a\int_0^x [A(x)-A(t+0)]\,dt=a\int_0^x [A(x)-A(t)]\,dt.$$

## § 4. ВИДЫ СХОДИМОСТИ СЛ. В.

**Сходимость по вероятности.** Последовательность сл. в. $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots$ сходится к сл. в. $\xi$ по вероятности, если для всякого $\varepsilon>0$

$$P(|\xi_n-\xi|>\varepsilon)\to 0 \quad \text{при } n\to\infty.$$

Этот факт записывается в виде

$$\xi_n \xrightarrow{P} \xi \text{ или } p\lim \xi_n = \xi.$$

В теории меры этой сходимости соответствует сходимость по мере.

**Сходимость в среднем.** Последовательность сл. в. $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится к сл. в. $\xi$ в среднем порядка $\lambda > 0$, если

$$E|\xi_n - \xi|^{\lambda} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

В случае $\lambda = 2$ эта сходимость называется сходимостью в среднем квадратичном и записывается в виде

$$\xi_n \xrightarrow{\text{с. к.}} \xi \text{ или } \text{l.i.m.}\, \xi_n = \xi$$

(l.i.m. = limit in mean).

**Сходимость почти наверное.** Последовательность сл. в. $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится к сл. в. $\xi$ почти наверное (п. н.), или с вероятностью единица, если

$$P(\lim \xi_n = \xi) = 1.$$

Этот факт записывается в виде

$$\xi_n \xrightarrow{\text{п. н.}} \xi \text{ или } P\lim \xi_n = \xi.$$

Отметим, что множество

$$\{\lim \xi_n = \xi\} = \{\omega : \lim \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\} =$$

$$= \bigcap_{m \geqslant 1} \bigcup_{N \geqslant 1} \bigcap_{n \geqslant N} \left\{|\xi_n - \xi| < \frac{1}{m}\right\} \subset \Omega$$

является событием. В теории меры этой сходимости соответствует сходимость почти всюду.

**Сходимость по распределению.** Последовательность сл. в. $\xi_1, \xi_2, \ldots$ сходится к сл. в. $\xi_0$ по распределению, если

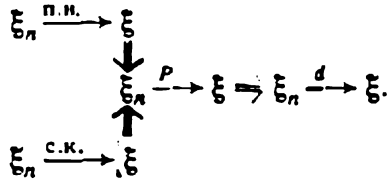
$$F_n(x) \to F_0(x)$$

во всех точках $x$ непрерывности (предельной) функции $F_0$, где $F_k$ есть ф. р. сл. в. $\xi_k$, $k \geqslant 0$. Этот факт часто записывается в виде

$$\xi_n \xrightarrow{d} \xi_0$$

(d = distribution).

Между введенными видами сходимости верны следующие соотношения:



**Теорема Прохорова.** Пусть

$(R, \mathbf{B})$ — польское (т. е. метрическое полное сепарабельное) пространство;

$\mathrm{Cap}(R)$ — множество всех вероятностных мер на $(R, \mathbf{B})$ ($\mathrm{Cap}$ = collection of all probability distributions);

$C(R)$ — пространство действительных ограниченных непрерывных функций на $R$.

Говорят, что последовательность $\{P_n\} \subset \mathrm{Cap}(R)$ **слабо** сходится к вероятностной мере $P \in \mathrm{Cap}(R)$, если

$$\int_R f dP_n \to \int_R f dP \quad \forall f \in C(R).$$

Этот факт обозначают в виде

$$P_n \xrightarrow{w} P \quad (w = \text{weakly}).$$

Иногда будем использовать обозначение

$$(P, f) = \int_R f dP.$$

**Замечание 1.** $F_n \xrightarrow{d} F_0$ равносильно $P_n \xrightarrow{w} P_0$. Здесь $F_n$ — ф. р.; $P_n$ — вероятностная мера, соответствующая $F_n$; $F_n \xrightarrow{d} F_0$ означает, что $F_n(x) \to F_0(x)$ в точках непрерывности функции $F_0$.

**Замечание 2.** $(P, f) = (Q, f)$ $\forall f \in C(R)$ влечет $P = Q$.

Семейство $E \subset \mathrm{Cap}(R)$ называется **относительно компактным**, если для всякой последовательности $\{P_n\} \subset E$ существует подпоследовательность $\{P_{n'}\} \subset \{P_n$ и $P \in \mathrm{Cap}(R)$ такие, что $P_{n'} \xrightarrow{w} P$ (здесь $P$ не обязательно принадлежит $E$).

Семейство $E \subset \mathrm{Cap}(R)$ называется **плотным**, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует компактное множество $K$ такое, что $P(K) > 1 - \varepsilon$ для всех $P \in E$.

**Теорема 1** (Прохоров). Предположим, что $R$ —

польское пространство. Семейство $E \subset \mathrm{Cap}(R)$ относительно компактно, если и только если оно плотно.

**Замечание 3.** Семейство $E$ относительно компактно, если оно плотно. В этом (важном для приложений) случае от метрического пространства не требуется, чтобы оно было сепарабельным и полным.

**Замечание 4.** Для $P$ и $Q \in \mathrm{Cap}(R)$ положим

$$\pi(P, Q) = \inf \{\varepsilon > 0 : P(A) \leqslant Q(A^\varepsilon) + \varepsilon, \quad Q(A) \leqslant$$
$$\leqslant P(A^\varepsilon) + \varepsilon \text{ для всех } A \in \mathbf{B}\},$$

где $A^\varepsilon = \{x : \rho(x, A) < \varepsilon\}$. Оказывается, что $\pi$ есть метрика (называемая метрикой Прохорова) и сходимость в метрическом пространстве $(\mathrm{Cap}(R), \pi)$ совпадает со слабой сходимостью.

**Сходимость характеристических функций.** Пусть $R = R^s$, $s \geqslant 1$. Х. ф. $\varphi$ вероятностной меры $P$ на $R^s$ определяется равенством

$$\varphi(t) = \int_{R^s} e^{i(t, x)} P(dx), \quad t \in R^s \qquad (*)$$

(интеграл существует, так как функция $x \longmapsto \exp\{i(t, x)\}$ непрерывна и ограничена). Очевидно, что функция $\varphi$ непрерывна. Равенство $(*)$ определяет отображение $k$: $P \longmapsto \varphi$. Было показано, что $k$ есть биекция.

**Теорема 2.** $P_n \xrightarrow{w} P_0$ равносильно $\varphi_n(t) \to \varphi_0(t)$ $\forall t$; здесь

$$\{P_n : n \geqslant 0\} \subset \mathrm{Cap}(R^s) \text{ и } \varphi_n = k(P_n).$$

Справедлив следующий результат: если последовательность х. ф. $\varphi_n$, $n = 1, 2, \ldots$, соответствующих распределениям $P_n$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится (поточечно) к некоторой функции $\varphi$, непрерывной в нуле, то существует распределение $P$ такое, что $P_n \xrightarrow{w} P$ и $\varphi$ есть х. ф. распределения $P$.

**Теорема 3** (центральная предельная теорема теории вероятностей). Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных сл. в. Предположим, что

$$E\xi_1 = \mu, \quad \mathrm{var}\, \xi_1 = \sigma^2 < \infty, \quad \sigma > 0,$$

и положим

$$S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n,$$

$$\zeta_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{\operatorname{var} S_n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_k - \mu}{\sigma} \quad \forall x.$$

Тогда

$$F_n(x) = P(\zeta_n < x) \to \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad \forall x.$$

**Замечание 7.** Согласно теореме Пойа и непрерывности функции $\Phi$ эта сходимость равномерная, т. е.

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \to 0.$$

**Замечание 8.** Если $\zeta$ — сл. в. с нормальным распределением $N(0, 1)$, то теорема утверждает, что $\zeta_n \to \zeta$ по распределению.

### ЗАДАЧИ 135—150

**135.** Доказать, что

$$\xi_n \to \xi \text{ почти наверное}$$

равносильно

$$\eta_n = \sup_{m \geqslant n} |\xi_m - \xi| \to 0 \text{ по вероятности.}$$

**136.** Для сходимости почти наверное последовательности сл. в. $\{\xi_n\}$ достаточно, чтобы

$$\sum_{n \geqslant 1} P\{|\xi_{n+1} - \xi_n| > \varepsilon_n\} < \infty$$

для некоторой суммируемой последовательности неотрицательных чисел $\{\varepsilon_n : n \geqslant 1\}$. Доказать.

**137.** Для дискретного вероятностного пространства сходимость почти наверное совпадает со сходимостью по вероятности.

**138.** Для дискретного вероятностного пространства из сходимости в среднем следует сходимость почти наверное.

**139.** Показать, что $\xi_n \downarrow 0$ по вероятности влечет

$$\xi_n \downarrow 0 \text{ почти наверное.}$$

**140.** Пусть $\{F_n,\ n\geqslant 0\}$ — последовательность ф. р. и $F_n\to F_0$ слабо. Показать, что существуют вероятностное пространство $(\Omega, S, P)$ и последовательность $\{\xi_n,\ n\geqslant 0\}$ сл. в. на нем такие, что

1) $F_n$ есть ф. р. сл. в. $\xi_n$ для всех $n\geqslant 0$,

2) $\xi_n\to\xi_0$ почти наверное.

**141.** Показать, что $\xi_n\to c=\text{const}$ по вероятности равносильно $\xi_n\to c$ по распределению.

**142.** Пусть $f$ — непрерывная функция на $R^s$, например $s=1$. Показать, что $\xi_n\to\xi_0$ по вероятности влечет $f(\xi_n)\to f(\xi_0)$ по вероятности; здесь $\xi_n$ — сл. векторы размерности $s$.

**143.** (Продолжение.) Показать, что $\xi_n\to\xi_0$ по распределению влечет $f(\xi_n)\to f(\xi_0)$ по распределению.

**144.** Пусть $\xi_n\to\xi$ по распределению и $E|\xi_n|<\infty$. Показать, что

$$E|\xi|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}E|\xi_n|.$$

**145.** Пусть сл. в. $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы, одинаково распределены и $E\xi_1=\mu$, $\operatorname{var}\xi_1=\sigma^2<\infty$. Положим

$$S_n=\xi_1+\ldots+\xi_n,\ \zeta_n=\frac{S_n-ES_n}{\sqrt{\operatorname{var}S_n}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_1^n\frac{\xi_k-\mu}{\sigma},\ \sigma>0.$$

Показать, что не существует такой сл. в. $\zeta$ с нормальным распределением $N(0, 1)$, чтобы $\zeta_n\to\zeta$ почти наверное, или в среднем, или по вероятности.

**146.** Пусть $\xi(t)$, $t\geqslant 0$, — пуассоновский процесс. Показать, что в смысле сходимости по вероятности

1) процесс $\xi(t)$, $t\geqslant 0$, непрерывен;

2) существует производная $\xi'(t)$ и $\xi'(t)=0$ п. н. $\forall t$.

**147.** Пусть $\omega(t)$, $t\geqslant 0$, — винеровский процесс. Показать, что при условии

$$\omega(t_1)=\omega_1,\ \omega(t_2)=\omega_2,\ t_1<t<t_2,$$

сл. в. $\omega(t)$ имеет нормальное распределение со средним $\omega_1+\dfrac{\omega_2-\omega_1}{t_2-t_1}(t-t_1)$ и дисперсией $\dfrac{(t-t_1)(t-t_1)}{t_2-t_1}$.

**148.** Пусть $\omega(t)$, $t \geqslant 0$, — стандартный винеровский процесс и $g$ — ограниченная измеримая функция на прямой. Показать, что

$$E \int_0^c g(\omega(t))\, dt = \int_0^c \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-\frac{y^2}{2t}}\, dy \right] dt =$$

$$= \int_0^c Eg(\omega(t))\, dt.$$

**149.** Пусть $\omega(t)$, $t \geqslant 0$, — стандартный винеровский процесс и $g_1, \ldots, g_m$ — интегрируемые на $[0, c]$ функции. Положим

$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m), \quad \xi_k = \int_0^c g_k(t)\, \omega(t)\, dt.$$

Показать, что сл. вектор $\xi$ имеет нормальное распределение $N(0, A)$, где $A = \{a_{ij}\}$ и

$$a_{ij} = \int_0^c \int_0^c g_i(s)\, g_j(t) \min(s, t)\, ds dt; \quad i, j = 1, \ldots, m.$$

**150.** Пусть $\omega(t)$, $t \geqslant 0$, — стандартный винеровский процесс и $c$ — некоторое положительное число. Показать, что

$$E \left| \sum_{k=0}^{n-1} [\omega(kh + h) - \omega(kh)]^2 - c \right|^2 \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

где $h = c/n$.

**РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 135—150**

**135.** Последовательность $\eta_n(\omega)$ убывает с ростом $n$ и сходится к некоторой сл. в. $\eta(\omega) \geqslant 0$. Для каждого $\varepsilon > 0$ события $\{\eta_n \geqslant \varepsilon\}$ убывают с ростом $n$. Следовательно,

$$P\{\eta \geqslant \varepsilon\} = P\left(\bigcap_{n \geqslant 1} \{\eta_n \geqslant \varepsilon\}\right) = \lim_{n \to \infty} P\{\eta_n \geqslant \varepsilon\}.$$

Отсюда

$$\eta_n \xrightarrow{P} 0 \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} P\{\eta_n \geqslant \varepsilon\} = 0 \ \forall \varepsilon > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\{\eta \geqslant \varepsilon\} = 0 \ \forall \varepsilon > 0 \Leftrightarrow P\{\eta = 0\} = 1$$

(при последнем переходе использовано, что события $\{\eta > \varepsilon\}$ убывают при $\varepsilon \downarrow 0$ и, например, $\{\eta > 0\} = \bigcap\limits_{k \geqslant 1} \{\eta \geqslant 1/k\}$, откуда

$$P\{\eta > 0\} = \lim_{k \to \infty} P\{\eta \geqslant 1/k\}.$$

Наконец,

$$\lim_{n \to \infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega) \Leftrightarrow \eta(\omega) = 0,$$

откуда

$\xi_n \xrightarrow[P]{} \xi$ почти наверное $\Leftrightarrow \eta(\omega) = 0$ почти наверное $\Leftrightarrow \eta_n \to 0$.

**136.** События $B_m = \bigcup\limits_{n > m} \{|\xi_{n+1} - \xi_n| > \varepsilon_n\} \downarrow B$ при $m \uparrow \infty$. Следовательно,

$$P(B) = \lim_{m \to \infty} P(B_m) \leqslant \lim_{m \to \infty} \sum_{n > m} P\{|\xi_{n+1} - \xi_n| > \varepsilon_n\} = 0,$$

откуда $P(B^c) = 1$, где

$$B^c = \bigcup_{m \geqslant 1} \bigcap_{n > m} (\{|\xi_{n+1} - \xi_n| > \varepsilon_n\}^c =$$

$$= \bigcup_{m \geqslant 1} \bigcap_{n > m} \{|\xi_{n+1} - \xi_n| \leqslant \varepsilon_n\}.$$

Если $\omega \in B^c$, то существует $m_0$, для которого

$$|\xi_{n+1}(\omega) - \xi_n(\omega)| \leqslant \varepsilon_n(\omega) \ \forall n > m,$$

т. е. сходится ряд $\sum\limits_{n \geqslant m_0} [\xi_{n+1}(\omega) - \xi_n(\omega)]$, что влечет сходимость $\xi_n(\omega)$.

**137.** Покажем, что сходимость $\xi_n \to \xi$ по вероятности влечет сходимость $\xi_n \to \xi$ почти наверное. Можно считать, что $\xi = 0$. Пусть $\xi_n \to 0$ по вероятности, $\omega$ — элементарное событие, $P(\omega) = p > 0$ и $\varepsilon > 0$. Так как $P(|\xi_n| > \varepsilon) < p$ начиная с некоторого номера $n_p$, то $|\xi_n(\omega)| \leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant n_p$. Таким образом, если $P(\omega) > 0$, то $\xi_n(\omega) \to \xi(\omega)$. Сходимость может нарушиться лишь на множестве $A \subset \{\omega : P(\omega) = 0\}$. Но так как вероятностное пространство дискретно, то

$P(A)=0$, т. е. $\xi_n$ не стремится к нулю лишь на множестве нулевой вероятности, т. е. $\xi_n \to 0$ почти наверное.

Остается заметить, что сходимость почти наверное влечет (для общего вероятностного пространства, а не только дискретного) сходимость по вероятности.

Действительно,

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi\right) = 1 \Rightarrow$$

$$P\left\{\bigcap_k \bigcup_N \bigcap_{n>N} (|\xi_n - \xi| \leqslant 1/k)\right\} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left\{\bigcup_k \bigcap_N \bigcup_{n>N} (|\xi_n - \xi| > 1/k)\right\} = 0 \Rightarrow$$

$$\forall k\ P\left\{\bigcap_N \bigcap_{n>N} (|\xi_n - \xi| > 1/k\right\} = 0 \Rightarrow$$

$$\forall k\ P\left\{\bigcup_{n>N} (|\xi_n - \xi| > 1/k)\right\} \to 0 \text{ при } N \to \infty \Rightarrow$$

$$\forall k\ P\{|\xi_n - \xi| > 1/k\} \to 0 \text{ при } n \to \infty \Rightarrow$$

$\xi_n \to \xi$ по вероятности.

**138.** Сходимость $\xi_n \to \xi$ в среднем порядке $\lambda > 0$ на дискретном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ означает, что $\sum_\omega P(\omega)|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)|^\lambda \to 0$ при $n \to \infty$, что для всякого $\omega \in \Omega$ влечет $P(\omega)|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)|^\lambda \to 0$ при $n \to \infty$. Если теперь $P(\omega) > 0$, это дает $\xi_n(\omega) \to \xi(\omega)$. Таким образом, сходимость $\xi_n(\omega) \to \xi(\omega)$ может нарушаться лишь на множестве $A \subset \{\omega : P(\omega) = 0\}$. Так как вероятностное пространство дискретно, то $P(A) = 0$.

**139.** Заметим, что задача фактически решена при решении задачи 135 (в тексте решения задачи 135 под $\eta_n$ нужно понимать теперь произвольную убывающую последовательность).

**140.** Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, где $\Omega = (0, 1)$, $\mathscr{F}$ — класс борелевских подмножеств промежутка $(0, 1)$, $P(A) = |A|$ для промежутка $A \subset (0, 1)$, где $|A|$ — длина этого промежутка (эти условия определяют вероятность $P$ на $\mathscr{F}$). Положим $\xi_n(\omega) = F_n^{-1}(\omega)$ для $\omega \in \Omega$, где произвольной ф. р. $F(x)$ по определению считаем

$$F^{-1}(y)=\inf\{z: F(z)\geqslant y\},\ y\in(0,\ 1).$$

При таком определении сл. в. $\xi=F^{-1}(\eta)$ имеет ф. р. $F$. В самом деле,

$$F^{-1}(\eta)<x\Rightarrow F(x)\geqslant\eta,$$

откуда

$$P\{\xi<x\}\leqslant P\{\eta\leqslant F(x)\}=F(x).$$

Далее,

$$\eta<F(x)\Rightarrow F^{-1}(\eta)\leqslant x,$$

откуда

$$F(x)=P\{\eta<F(x)\}\leqslant P\{\xi\leqslant x\}.$$

Следовательно,

$$P\{\xi<x\}\leqslant F(x)\leqslant P\{\xi\leqslant x\}.$$

Если $P\{\xi=x\}=0$, то из полученных неравенств следует $P\{\xi<x\}=F(x)$. Если $P\{\xi=x\}>0$, то существует последовательность $x_n\uparrow x$, $P\{\xi=x_n\}=0$ и опять

$$P\{\xi<x\}=\lim_{n\to\infty}P\{\xi<x_n\}=\lim_{n\to\infty}F(x_n)=F(x).$$

Тем самым 1) выполнено.

Проверим, что выполнено 2). Пусть $y_0\in(0,\ 1)$, $\varepsilon>0$. Существует точка $z_1$, для которой $F_0^{-1}(y_0)-\varepsilon<z_1<F_0^{-1}(y_0)$. Можно считать $z_1$ точкой непрерывности функции $F_0$, так как количество точек разрыва не более чем счетно. Тогда $F_n(z_1)\to F_0(z_1)$ и, следовательно, $F_n(z_1)<y_0$ при $n>n_0=n_0(\varepsilon)$, так как $F_0(z_1)<y_0$. Отсюда $z_1<F_n^{-1}(y_0)$ и, следовательно, $F_0^{-1}(y_0)-\varepsilon<F_n^{-1}(y_0)$ при $n>n_0$. Если

$$\inf\{z: F(z)\geqslant y_0\}=\inf\{z: F(z)>y_0\},\qquad (*)$$

то существует $z_2$, для которой $F_0^{-1}(y_0)<z_2<F_0^{-1}(y_0)+\varepsilon$, и можно считать $z_2$ точкой непрерывности функции $F_0$. Тогда $F_n(z_2)\to F_0(z_2)$, $F_n(z_2)>y_0$ при $n>n_0$, $z_2\geqslant F_n^{-1}(y_0)$ при $n>n_0$, $F_n^{-1}(y_0)<F_0^{-1}(y_0)+\varepsilon$ при $n>n_0$. Итак, в рассматриваемом случае $F_0^{-1}(y_0)-\varepsilon<F_n^{-1}(y_0)<F_0^{-1}(y_0)+\varepsilon$ при достаточно больших $n$, откуда в силу произвольности $\varepsilon$ $F_n^{-1}(y_0)\to F_0^{-1}(y_0)$. Осталось заметить, что точек $y_0\in(0,\ 1)$, не удовлетворяющих условию $(*)$, не более чем счетное количество. В самом деле, если в точке $y_0\in(0,\ 1)$ условие нарушается, то $x_0=\inf\{z: F(z)\geqslant y_0\}<x_1=\inf\{z: F(z)>y_0\}$, $F(z)=y_0$ при всех $z\in(x_0,\ x_1)$. Различным таким точкам $y_0$ от-

вечают непересекающиеся интервалы $(x_0, x_1)$, а количество последних не более чем счетно. Наконец, $P\{\omega : \omega \in A\} = 0$ для каждого не более чем счетного множества $A$.

**141.** Пусть $\xi_n \to c$ по распределению. Для $\varepsilon > 0$ имеем

$$P\{\xi_n - c < -\varepsilon\} \to 0,\ P\{\xi_n - c \geqslant \varepsilon\} = 1 - P\{\xi_n - c < \varepsilon\} \to 0,$$

так как точки $c - \varepsilon$ и $c + \varepsilon$ являются точками непрерывности предельной ф. р. Тем самым $P\{|\xi_n - c| > \varepsilon\} \leqslant P\{\xi_n - c < -\varepsilon\} + P\{\xi_n - c \geqslant \varepsilon\} \to 0$, т. е. $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$.

Обратное есть следствие более общего утверждения: $\xi_n \xrightarrow{P} \xi \Rightarrow \xi_n \to \xi$ по распределению. (В самом деле, если $F_n$ и $F$ — ф. р. соответственно $\xi_n$ и $\xi$, $x$ — точка непрерывности функции $F$, то, используя легко проверяемое неравенство

$$|P(A) - P(B)| \leqslant P(A \Delta B),$$

имеем при $\delta > 0$

$$|F_n(x) - F(x + \delta)| \leqslant P\{\xi_n < x, \xi \geqslant x + \delta\} +$$
$$+ P\{\xi < x,\ \xi_n \geqslant x + \delta\} \leqslant 2P\{|\xi_n - \xi| > \delta\} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Пусть $\delta$ взято таким, что $|F(x + \delta) - F(x)| < \varepsilon/2$, тогда если $|F_n(x) - F(x + \delta)| < \varepsilon/2$ при $n > n_0$, то $|F_n(x) - F(x)| \leqslant |F_n(x) - F(x + \delta)| + |F(x + \delta) - F(x)| < \varepsilon$ при $n > n_0$. Следовательно, $F_n(x) \to F(x)$).

**142.** Так как $\{|\xi_0| > N\} \downarrow \varnothing$ при $N \uparrow \infty$, то существует $N$ такое, что

$$P\{|\xi_0| > N/2\} < \varepsilon/3.$$

Непрерывная функция $f$ равномерно непрерывна на замкнутом шаре $\{x : |x| \leqslant N\}$ в $R^s$. Следовательно, существует $\delta > 0$ такое, что

$$|x| \leqslant N,\ |y| \leqslant N,\ |f(x) - f(y)| > \varepsilon \Rightarrow |x - y| > \delta.$$

Теперь

$$P\{|f(\xi_n) - f(\xi_0)| > \varepsilon\} \leqslant P\{|\xi_n| \leqslant N,\ |\xi_0| \leqslant N,$$
$$|f(\xi_n) - f(\xi_0)| > \varepsilon\} + P(\{|\xi_n| \leqslant N,\ |\xi_0| \leqslant N\}^c) \leqslant$$
$$\leqslant P\{|\xi_n - \xi_0| > \delta\} + P\{|\xi_n| > N\} + P\{|\xi_0| > N\} \leqslant$$
$$\leqslant P\{|\xi_n - \xi_0| > \delta\} + P\{|\xi_0| > N/2\} + P\{|\xi_n - \xi_0| > N/2\} +$$
$$+ P\{|\xi_0| > N\} \leqslant P\{|\xi_n - \xi_0| > \delta\} + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 < \varepsilon$$

при $n>n_0$, где $n_0$ такое, что $P\{|\xi_n-\xi_0|>\delta\}<\varepsilon/3$ при $n>n_0$.

**143.** Сходимость сл. векторов $\xi_n\to\xi_0$ по распределению означает сходимость $E\varphi(\xi_n)\to E\varphi(\xi_0)$ для любой числовой непрерывной ограниченной функции $\varphi$ на $R^s$. Но тогда $E\varphi(f(\xi_n))\to E\varphi(f(\xi))$, так как сложная функция $\psi(x)=\varphi(f(x))$ ограничена и непрерывна вместе с $\varphi$.

**144.** В силу задачи 143 можно считать $s=1$. Рассмотрим ограниченные непрерывные функции

$$\varphi_N(x)=\begin{cases} x, & |x|\leqslant N,\\ N, & x>N,\\ -N, & x<-N.\end{cases}$$

Имеем

$$\varlimsup_{n\to\infty} E|\xi_n|\geqslant \varlimsup_{n\to\infty} E|\varphi_N(\xi_n)|=E|\varphi_N(\xi)|\uparrow E|\xi|$$

при $N\to\infty$, так как $E|\varphi_N(\xi)|=E\min(|\xi|, N)$.

**145.** Воспользуемся следующим общим утверждением:

$$\zeta_n\xrightarrow{\text{с.к.}}\zeta\Leftrightarrow\zeta_n\xrightarrow{P}\zeta \text{ и } E\zeta_n^2\to E\zeta^2<\infty.$$

1) Пусть $\zeta_n\xrightarrow{P}\zeta$, тогда $\zeta_n\xrightarrow{d}\zeta$ и согласно ЦПТ сл. в. $\zeta$ имеет нормальное распределение $N(0, 1)$. В частности, $E\zeta^2=1$, поэтому $1=E\zeta_n^2\to E\zeta^2=1$, и, значит, на основании предыдущего утверждения $\zeta_n\xrightarrow{\text{с.к.}}\zeta$.

2) Остается показать, что последовательность $\{\zeta_n\}$ не может сходиться в среднем квадратическом. Если $\zeta_n\xrightarrow{\text{с.к.}}\zeta$, то, в частности, $\forall\varepsilon>0\ \exists N=N_\varepsilon$, что при $m>n\geqslant N$ выполнено

$$\operatorname{var}(\zeta_m-\zeta_n)<\varepsilon. \qquad (*)$$

Но

$$\zeta_m-\zeta_n=\left(\frac{1}{\sqrt{m}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)(\eta_1+\ldots+\eta_n)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{m}}(\eta_{n+1}+\ldots+\eta_m),\ \eta_k=\frac{\xi_k-\mu}{\sigma},$$

откуда в силу независимости сл. в. $\eta_1, \ldots, \eta_m$

$$\operatorname{var}(\zeta_m - \zeta_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{m}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 n + \\ + \left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)^2 (m-n) = 2 - 2\sqrt{\frac{n}{m}},$$

и неравенство (*) не выполняется для $m$ значительно большего, чем $n$.

**146.** 1) Покажем, что $\xi(t+h) \xrightarrow{P} \xi(t)$ при $h \to 0$. Пусть $h>0$. Так как процесс $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, однороден во времени (т. е. распределение сл. в. $\xi(t+h) - \xi(t)$ не зависит от $t$), то $\forall \varepsilon > 0$

$$P\{|\xi(t+h) - \xi(t)| \geqslant \varepsilon\} = P\{\xi(h) \geqslant \varepsilon\} \leqslant P\{\xi(h) > 0\} = \\ = 1 - P\{\xi(h) = 0\} = 1 - e^{-ah} \to 0 \text{ при } h \downarrow 0.$$

(Отметим, что $\xi(t) \uparrow$ п. н и $\xi(t)$ принимает целые неотрицательные значения.) Аналогично,

$$P\{|\xi(t-h) - \xi(t)| \geqslant \varepsilon\} = P\{\xi(h) \geqslant \varepsilon\} \leqslant P\{\xi(h) > 0\} = \\ = 1 - P\{\xi(h) = 0\} = 1 - e^{-ah} \to 0 \text{ при } h \downarrow 0.$$

2) Положим $\xi_h(t) = \frac{1}{h}[\xi(t+h) - \xi(t)]$ при $h \neq 0$

Имеем

$$P\{|\xi_h(t)| \geqslant \varepsilon\} = P\{|\xi(t+h) - \xi(t)| \geqslant \varepsilon |h|\} \leqslant \\ \leqslant P\{|\xi(t+h) - \xi(t)| > 0\} = 1 - e^{-a|h|} \to 0 \text{ при } h \to 0.$$

Остается заметить, что $\xi_n \xrightarrow{P} \bar{\xi}$ и $\xi_n \to \tilde{\bar{\xi}} \Rightarrow P(\bar{\xi} = \tilde{\bar{\xi}}) = 1$.

**147.** Совместное распределение сл. в. $\omega(t_1)$, $\omega(t)$, $\omega(t_2)$ нормальное. Следовательно, условное распределение нормальное и

$$E\{\omega(t) \mid \omega(t_1) = \omega_1, \quad \omega(t_2) = \omega_2\} = c_1^{(0)}\omega_1 + c_2^{(0)}\omega_2,$$

где константы $c_1^{(0)}$ и $c_2^{(0)}$ находятся минимизацией квадратичной формы

$$\Phi(c_1, c_2) = E(\omega(t) - c_1\omega(t_1) - c_2\omega(t_2))^2,$$

причем

$$\min_{c_1, c_2} \Phi(c_1, c_2) = \Phi(c_1^{(0)}, c_2^{(0)}) = \\ = E\{(\omega(t) - c_1^{(0)}\omega_1 - c_1^{(0)}\omega_2)^2 \mid \omega(t_1) = \omega_1, \omega(t_2) = \omega_2\}$$

(последнее следует из того, что для сл. в. $\xi_1$, $\xi_2$ и $\eta$, совместное распределение которых нормальное, и $\xi=(\xi_1, \xi_2)$

$$\Phi(c_1, c_2)=EE\{(\eta-\Sigma c_i\xi_i)^2|\xi\}=$$
$$=E[E(\eta-E(\eta|\xi))^2+(E(\eta|\xi)-\Sigma c_i\xi_i)^2]\geqslant$$
$$\geqslant EE[\eta-E(\eta|\xi)]^2=E[\eta-E(\eta|\xi)]^2=\sigma_t^2,$$

где $E(\eta|\xi)-\Sigma c_i\xi_i=0$ при $c_i=c_i^{(0)}$ и дисперсия условного распределения $\sigma_t^2$ не зависит от $\xi$). Имеем

$$\Phi(c_1, c_2)=E(\omega(t_1)+[\omega(t)-\omega(t_1)]-c_1\omega(t_1)-$$
$$-c_2(\omega(t_1)+[\omega(t)-\omega(t_1)]+[\omega(t_2)-\omega(t)]))^2=$$
$$=\operatorname{var}((1-c_1-c_2)\omega(t_1)+(1-c_2)[\omega(t)-\omega(t_1)]-$$
$$-c_2[\omega(t_2)-\omega(t)]=(1-c_1-c_2)^2t_1+$$
$$+(1-c_2)^2(t-t_1)+c_2^2(t_2-t),$$
$$\partial\Phi/\partial c_1=-2(1-c_1-c_2)t_1,$$
$$\partial\Phi/\partial c_2=-2(1-c_1-c_2)t_1-2(1-c_2)(t-t_1)+2c_2(t_2-t).$$

Из условия $\partial\Phi/\partial c_1=0$, $\partial\Phi/\partial c_2=0$ находим $c_1^{(0)}+c_2^{(0)}=1$, $(1-c_2^{(0)})(t-t_1)=c_2^{(0)}(t_2-t)$, откуда

$$c_2^{(0)}=\frac{t-t_1}{t_2-t_1},\ c_1^{(0)}=\frac{t_2-t}{t_2-t_1},\ c_1^{(0)}\omega_1+c_2^{(0)}\omega_2=$$
$$=(1-c_2^{(0)})\omega_1+c_2^{(0)}\omega_2=\omega_1+c_2^{(0)}(\omega_2-\omega_1)=$$
$$=\omega_1+\frac{\omega_2-\omega_1}{t_2-t_1}(t-t_1),\ \Phi(c_1^{(0)}, c_2^{(0)})=$$
$$=c_1^{(0)^2}(t-t_1)+c_2^{(0)^2}(t_2-t)=\frac{(t_2-t)(t-t_1)}{t_2-t_1}.$$

148. Результат следует из теоремы Фубини, так как

$$\int_0^c E|g(\omega(t))|dt\leqslant\int_0^c Mdt=Mc,\ \text{если}\ |g(x)|\leqslant M.$$

149. Если $g_k^{(n)}$ непрерывные на $[0, c]$ функции такие, что

$$\int_0^c|g_k^{(n)}(t)-g_k(t)|dt\to 0\ \text{при}\ n\to\infty,$$

то

$$|\xi_k-\xi_k^{(n)}|=\left|\int_0^c g_k(t)\omega(t)dt-\int_0^c g_k^{(n)}(t)\omega(t)dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0<t\leqslant c} |\omega(t)| \int_0^c |g_k(t) - g_k^{(n)}(t)|\, dt \to 0$$

при $n\to\infty$ почти наверное (использована непрерывность почти наверное траекторий винеровского процесса). Имеем

$$\xi_k^{(n)} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} g_k^{(n)}(c/l)\, w(c/l).$$

Следовательно, распределение случайного вектора $\xi$ есть предел последовательности нормальных распределений векторов $\xi^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_m^{(n)})$ и тем самым нормально (последнее легко доказывается, например, с помощью характеристических функций; в случае $\xi^{(n)} \sim N(\mu^{(n)}, A^{(n)})$ слабая сходимость $\xi^{(n)} \to \xi \sim N(\mu, A)$ равносильна $\mu^{(n)} \to \mu$, $A^{(n)} \to A$). Далее,

$$a_{ij} = \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{cov}(\xi_i^{(n)}, \xi_j^{(n)}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=1}^{N} g_i^{(n)}(c/p)\, g_j^{(n)}(c/q) \min(c/p, c/q) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^c \int_0^c g_i^{(n)}(s)\, g_j^{(n)}(t) \min(s, t)\, ds dt =$$

$$= \int_0^c \int_0^c g_i(s)\, g_j(t) \min(s, t)\, ds dt,$$

где использовано, что

$$\left| \int_0^c \int_0^c g_i^{(n)}(s)\, g_j^{(n)}(t) \min(s, t)\, ds dt - \right.$$

$$\left. - \int_0^c \int_0^c g_i(s)\, g_j(t) \min(s, t)\, ds dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant c \int_0^c \int_0^c \left| g_i^{(n)}(s)\, g_j^{(n)}(t) - g_i(s)\, g_j(t) \right| ds dt =$$

$$= c \int_0^c |g_i^{(n)}(s) - g_i(s)|\,ds \int_0^c |g_j^{(n)}(t) - g(t)|\,dt \to 0$$

при $n \to \infty$.

**150.** Если сл. в. $\xi$ имеет нормальное распределение $N(0, \sigma^2)$, то $E\xi^2 = \sigma^2$, $E\xi^4 = 3\sigma^4$. Так как процесс $\omega(t)$, $t \geqslant 0$, однороден во времени (т. е. распределение сл. в. $\omega(t+h) - \omega(t)$ не зависит от $t$) и его приращения независимы, то с учетом $E\omega(h)^2 = h$, $E\omega(h)^4 = 3h^2$, $h = c/n$ имеем следующее выражение для указанного в задаче математического ожидания:

$$E = nE\omega(h)^4 + (n^2 - n)E\omega(h^2) \cdot E\omega(h)^2 - 2cnE\omega(h)^2 +$$

$$+ c^2 = 3nh^2 + (n^2 - n)h^2 - 2cnh + c^2 =$$

$$= c^2\left[\frac{3}{n} + \frac{n-1}{n} - 2 + 1\right] = \frac{2}{n}c^2 \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

# Часть 3. СТАТИСТИКА

## *Введение*

Исходным материалом для всякого статистического исследования служит совокупность результатов наблюдений $x$, представляющих собой значения случайной величины $\xi$ с распределением, зависящим от ненаблюдаемого параметра $\theta \in \Theta$. Статистические выводы призваны по результатам наблюдений $x$ высказать суждение относительно истинного значения ненаблюдаемого параметра $\theta \in \Theta$.

Другими словами, ищется $\theta$ через $x$. Связь между $\theta$ и $x$ заключается в том, что $x$ есть значение сл. в. $\xi$ с распределением $P_\theta$, зависящим от $\theta \in \Theta$.

**Пример.** Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ есть значение сл. вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, компоненты которого независимы и одинаково распределены по нормальному закону $N(\mu, \sigma^2)$. При этом $\mu$ и/или $\sigma^2$ могут быть неизвестными. Если, например, неизвестны $\mu$ и $\sigma^2$, то за ненаблюдаемый параметр $\theta$ принимается $\theta = (\mu, \sigma^2)$ и тогда $\Theta = R^1 \times R^1_+$. Этот пример может служить моделью $n$ независимых измерений некоторой величины, значение которой неизвестно, с ошибками измерений, распределенными по нормальному закону.

Следует различать $\xi$ и $x$ (сл. в. и ее значение), но, чтобы не вводить дополнительных обозначений, будем пользоваться (там, где это не вызывает путаницы) одним и тем же символом, как для сл. в., так и для ее значения.

Математической моделью статистического эксперимента может служить вероятностный автомат, преобразующий входной сигнал в выходной. Для описания такого автомата будем интерпретировать

$\Theta=\{\theta\}$ как множество входных сигналов,
$X=\{x\}$ как множество выходных сигналов.
Автомат работает по правилу: если входной сигнал есть $\theta$, то выходной сигнал будет $x$ с распределением $P_\theta$; см. рис. 5.

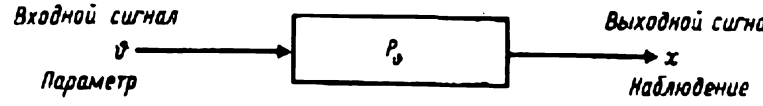



Рис. 5

Требуется по выходному сигналу $x$ и «передаточной функции» $P_\theta$ высказать суждение о входном сигнале $\theta$.

Множество $X=\{x\}$ возможных наблюдений называется **выборочным пространством** (пространством выборок). По существу это есть измеримое пространство $(X, \mathscr{A})$, так что для каждого множества $A\in\mathscr{A}$ можно говорить о вероятности $P_\theta(x\in A)$ того, что наблюдение $x$ содержится в этом множестве $A$. Множество же $\Theta=\{\theta\}$ называется **параметрическим пространством** (пространством параметров).

Обозначим через $D=\{d\}$ множество возможных решений относительно истинного значения параметра $\theta$ (пространство решений). Всякий статистический анализ должен по наблюдению $x$ вынести решение $\delta(x)\in D$ (относительно истинного значения параметра $\theta$). Функция $\delta: X\to D$ называется решающей функцией, или решающим правилом, или (статистической) **стратегией.**

Естественно, что конечным результатом всякого статистического анализа должна быть стратегия $\delta$: если $x$ есть наблюдение, то $\delta(x)$ есть решение относительно истинного значения параметра $\theta$.

Как правило, с самого начала рассматривают не все стратегии $\delta: X\to D$, а ограничиваются некоторым множеством $\Delta=\{\delta\}$ допустимых стратегий.

**Случай 1.** Решением может быть точка из $\Theta$, а $D=\Theta$. Статистический анализ этого случая есть **теория точечных оценок.** Если, например, $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и сл. в. $x_1, \ldots, x_n$ независимы и одинаково распределены по нормальному закону $N(\theta, 1)$, то стратегия

$$x \mapsto \delta(x)=\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)=\bar{x},$$

которая в данном случае называется оценкой параметра $\theta$, обладает свойствами

$$E_\theta \delta(x) = \theta \quad \forall \theta, \qquad (*)$$
$$E_\theta |\delta(x) - \theta|^\alpha \leqslant E_\theta |\delta_1(x) - \theta|^\alpha$$

для всех $\theta$, $\alpha > 0$ и всех стратегий $\delta_1$, удовлетворяющих свойству $(*)$.

**Случай 2.** Решением может быть некоторое подмножество множества $\Theta$, а $D \subset \mathscr{P}(\Theta)$, где $\mathscr{P}(\Theta)$ — множество всех подмножеств множества $\Theta$. Статистический анализ этого случая есть **теория доверительных множеств** (интервальных оценок). Если, например, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и сл. в. $x_1, \ldots, x_n$ независимы и одинаково распределены по нормальному закону $N(\theta, \sigma^2)$ с известной дисперсией $\sigma^2$, $\sigma > 0$, то сл. в.

$$\sqrt{n}\,\frac{\bar{x} - \theta}{\sigma}, \text{ где } \bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n),$$

имеет нормальное распределение $N(0, 1)$, и поэтому

$$P_\theta\left\{|\theta - \bar{x}| \leqslant \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = P_\theta\left\{|\sqrt{n}\,\frac{\bar{x} - \theta}{\sigma}| \leqslant 3\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-3}^{3} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du = 0{,}998\ldots.$$

Если теперь

$$\delta(x) = \left[\bar{x} - \frac{3\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}\right],$$

то

$$P_\theta\{\theta \in \delta(x)\} = 0{,}998\ldots \quad \forall \theta.$$

**Случай 3.** Пусть $\Theta = \Theta_1 + \ldots + \Theta_s$, а $D = \{d_1, \ldots, d_s\}$, где $d_i$ есть решение вида $\theta \in \Theta_i$. Статистический анализ этого случая есть **теория проверки** (сложных) **гипотез.** Особый интерес представляет частный случай, когда множества $\Theta_1, \ldots, \Theta_s$ одноточечные, т. е. $\Theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_s\}$, а $d_i$ есть решение вида $\theta = \theta_i$. Статистический анализ этого случая есть теория проверки (простых) гипотез. Например, эти случаи могут служить математической моделью классификации, дискриминации объектов, полностью характеризуе-

мых параметром $\theta$ по результату наблюдения (измерения) этого параметра со случайными ошибками.

## § 1. УПОРЯДОЧЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШАЮЩИХ ПРОЦЕДУР. СТАТИСТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ. ДОСТАТОЧНАЯ, ПОЛНАЯ, СВОБОДНАЯ СТАТИСТИКИ. НЕСМЕЩЕННЫЕ ОЦЕНКИ С МИНИМАЛЬНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ. ЧАСТО ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

**Упорядочение статистических стратегий.** Так как конечной целью всякого статистического исследования является выбор стратегии, необходимы дополнительные соображения, позволяющие упорядочить стратегии, в частности, для любой пары стратегий $\delta_1$ и $\delta_2$ указать, которая из них предпочтительнее другой.

Одна из возможностей, позволяющая частично упорядочить стратегии, заключается в следующем. Пусть $l(d|\theta)$ есть потери при использовании решения $d$, если истинное значение ненаблюдаемого параметра есть $\theta$. Это означает, что задана функция $l: D\times\Theta\to R^1$ ($l=\text{loss}=$потеря). Если теперь используется стратегия $\delta\in\Delta$; то средние потери составляют

$$R(\delta|\theta)=E_\theta l(\delta(x)|\theta)=\int_X l(\delta(x)|\theta)\,P_\theta(dx).$$

Функция $(\delta,\theta)\mapsto R(\delta|\theta)$ называется **функцией риска**. При этом $R(\delta|\theta)$ есть средние потери при использовании стратегии $\delta$, если истинное значение ненаблюдаемого параметра есть $\theta$.

Если теперь для двух стратегий $\delta_1$ и $\delta_2$ выполнено

$$R(\delta_1|\theta)\leqslant R(\delta_2|\theta)\quad\forall\theta,\qquad(*)$$

то естественно считать, что стратегия $\delta_1$ предпочтительнее стратегии $\delta_2$. Это и определяет частичный порядок во множестве $\Delta$ допустимых стратегий.

**Замечание 1.** Для всякого $\theta\in\Theta$ функция $x\mapsto l(\delta(x)|\theta)$ должна быть измеримой по мере $P_\theta$ (это, как минимум, требуется при определении функции риска). Эти (и другие) соображения определяют выбор множества $\Delta$ допустимых стратегий.

**Замечание 2.** Утверждение «$\theta$ есть истинное зна-

чение ненаблюдаемого параметра» означает, что сл. в. (наблюдение) $x$ имеет распределение $P_\theta$.

К сожалению, не всякая пара допустимых стратегий $\delta_1$ и $\delta_2$ сравнима в смысле (*); см. рис. 6. В этом состоит основная трудность в постановке статистической задачи.

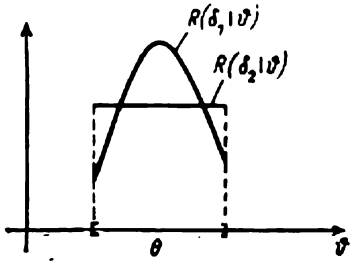



Рис. 6

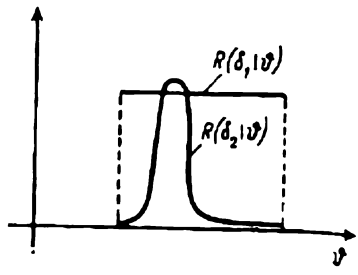



Рис. 7

Но может случиться, что существует стратегия $\delta^* \in \Delta$ такая, что

$$R(\delta^*|\theta) \leqslant R(\delta|\theta) \quad \forall\, \theta \in \Theta,\ \delta \in \Delta.$$

В этом случае $\delta^*$ называется (оптимальной) **стратегией с равномерно наименьшим риском**, или просто оптимальной стратегией. Простой способ, позволяющий упорядочить множество $\Delta$ допустимых стратегий, заключается в следующем. Для $\delta \in \Delta$ положим

$$R(\delta) = \sup_\theta R(\delta|\theta).$$

Теперь стратегию $\delta_1$ будем считать предпочтительнее стратегии $\delta_2$, если $R(\delta_1) \leqslant R(\delta_2)$. Если же для стратегии $\delta^* \in \Delta$ выполнено $R(\delta^*) \leqslant R(\delta)$ для всех $\delta \in \Delta$, то $\delta^*$ называется **минимаксной стратегией**. Такая стратегия дает самую надежную гарантию от больших потерь. Рис. 7 поясняет недостаток минимаксного подхода: согласно этому подходу $\delta_1$ лучше $\delta_2$, так как $\sup_\theta R(\delta|\theta_1) < \sup_\theta R(\delta_2|\theta)$, хотя $\delta_2$ выглядит предпочтительнее стратегии $\delta_1$.

Другой очень важный способ, позволяющий упорядочить стратегии, заключается в следующем. Для $\delta \in \Delta$ положим

$$R(\delta) = \int_\Theta R(\delta|\theta)\,\mu(d\theta),$$

где мера $\mu$ интерпретируется либо

1) как априорное распределение параметра $\theta$;

либо

2) как распределение степени значимости, которую экспериментатор приписывает разным $\theta$.

Стратегия $\delta^*$ называется **байесовской**, если

$$R(\delta^*) = \min_{\delta} R(\delta).$$

Есть несколько принципиальных утверждений в пользу такого подхода. Смысл одного из них заключается в том, что для всякой стратегии $\delta \in \Delta$ существует (при достаточно общих условиях) байесовская стратегия $\delta'$ (отвечающая некоторому распределению $\mu$ на $\Theta$), которая предпочтительнее, чем стратегия $\delta$ в том смысле, что

$$R(\delta'|\theta) \leqslant R(\delta|\theta) \quad \forall \theta.$$

**Статистическая структура.** Пусть $\mathscr{P} = \{P\}$ — некоторое семейство вероятностных мер (распределений) на измеримом пространстве $(X, \mathscr{A})$. Тройка $(X, \mathscr{A}, \mathscr{P})$ называется **статистической структурой.**

Часто семейство $\mathscr{P}$ параметризуется, и тогда оно записывается в виде $\mathscr{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$. Множество $\Theta$ называют пространством параметров, или параметрическим пространством. Естественным считается предположение: $\theta_1 \neq \theta_2 \Rightarrow P_{\theta_1} \neq P_{\theta_2}$.

Говорят, что статистическая структура $(X, \mathscr{A}, \mathscr{P})$ **доминируется σ-конечной мерой** $\mu$ на $(X, \mathscr{A})$, если все меры $P_\theta \in \mathscr{P}$ абсолютно непрерывны относительно меры $\mu$, т. е. для всякой меры $P_\theta \in \mathscr{P}$ существует функция (плотность $P_\theta$ по $\mu$) $L(x|\theta)$ по $x \in X$ такая, что

$$P_\theta(A) = \int_A L(x|\theta)\,\mu(dx) \text{ для всех } A \in \mathscr{A}.$$

В этом случае функция $X \times \Theta \ni (x, \theta) \mapsto L(x|\theta) \in [0, \infty)$ называется **функцией правдоподобия** ($L$ = likelihood).

Всякая измеримая функция от наблюдения называется **статистикой.** Более того, если $(X, \mathscr{A}, \mathscr{P})$ — статистическая структура, то измеримое отображение $T$ измеримого пространства $(X, \mathscr{A})$ в некоторое измеримое пространство $(Y, \mathscr{B})$ называется статистикой.

Таким образом, для всякого $P\in\mathcal{P}$ статистика $T$ есть сл. в. в вероятностном пространстве $(X, \mathcal{A}, \mathcal{P})$.

Две статистики $T_1: X\to Y$ и $T_2: X\to Y$ называются **эквивалентными**, если событие $\{T_1\neq T_2\}=\{x: T_1(x)\neq T_2(x)\}\in\mathcal{A}$ является $\mathcal{P}$-пренебрежимым. При этом событие $A\in\mathcal{A}$ называется $\mathcal{P}$-пренебрежимым, если $P(A)=0$ для всех $P\in\mathcal{P}$.

Две статистики $T_1$ и $T_2$ на $(X, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ называются **независимыми**, если для всякого $P\in\mathcal{P}$ независимы сл. в. $T_1$ и $T_2$, рассматриваемые в вероятностном пространстве $(X, \mathcal{A}, \mathcal{P})$.

Статистика $T$ на $(X, \mathcal{A}, \mathcal{P}=\{P_\theta, \theta\in\Theta\})$ называется **интегрируемой**, если для всякого распределения $P_\theta$, $\theta\in\Theta$, сл. в. $T$, рассматриваемая в вероятностном пространстве $(X, \mathcal{A}, P_\theta)$, интегрируема. Математическое ожидание сл. в. $T$, соответствующее распределению $P_\theta$, обозначается как $E_\theta T$ или $E_\theta T(x)$.

**Достаточная статистика.** Статистика $T$: $(X, \mathcal{A})\to(Y, \mathcal{B})$ называется **достаточной**, если при заданном значении статистики $T$ распределение наблюдения $x$ не зависит от $\theta$, т. е. (более точно) для всякого $A\in\mathcal{A}$

$$P_\theta\{x\in A/T(x)\}$$

не зависит от $\theta$ (и, значит, не несет никакой информации относительно $\theta$). Следующая теорема дает удобный способ отыскания достаточной статистики.

**Теорема факторизации.** Пусть $L$ — функция правдоподобия. Статистика $T$: $(X, \mathcal{A})\to(Y, \mathcal{B})$ является достаточной, если и только если существуют $\mathcal{A}$-измеримая неотрицательная функция $h$ на $X$ и $\mathcal{B}$-измеримая неотрицательная функция $g_\theta$ на $Y$ такие, что

$$L(x|\theta)=g_\theta(T(x))\cdot h(x) \text{ для всех } \theta\in\Theta,\ x\in X.$$

**Полная статистика.** Статистика называется (ограниченно) полной, если для всякой (ограниченной) числовой статистики $f(T)$

$$E_\theta f(T(x))=0\ \forall\theta\Rightarrow f(T(x))=0\ \mathcal{P}\text{-п. в.}$$

Последнее означает

$$P_\theta\{f(T(x))=0\}=1\ \forall\theta.$$

**Теорема 1.** Пусть статистическая структура $(X, \mathcal{A}, \mathcal{P}=\{P_\theta, \theta\in\Theta\})$ допускает функцию правдоподобия $L$ вида

$$\frac{dP_\theta}{d\mu}(x) = L(x \mid \theta) = c(\theta) \cdot \exp\left\{\sum_{k=1}^{m} \gamma_k(\theta)\, T_k(x)\right\}$$

(такое семейство распределений $P_\theta$ называется экспоненциальным), и существует подмножество $\Theta_0 \subset \Theta$ такое, что образ отображения

$$\Theta_0 \ni x \longmapsto \gamma(\theta) = \{\gamma_1(\theta), \ldots, \gamma_m(\theta)\} \in R^m$$

содержит хотя бы одну точку вместе с некоторой ее окрестностью. Тогда статистика $T(x) = \{T_1(x), \ldots, T_m(x)\}$ является полной (и достаточной).

**Свободная статистика.** Множество $A \in \mathscr{A}$ называется **свободным** (относительно семейства $\mathscr{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ вероятностных мер на $(X, \mathscr{A})$, если $P_\theta(A)$ не зависит от $\theta \in \Theta$. **Статистика** $T$: $(X, \mathscr{A}) \to (Y, \mathscr{B})$ называется **свободной**, если распределение этой статистики не зависит от $\theta \in \Theta$, т. е. $\{x : T(x) \in B\}$ есть свободное множество для всех $B \in \mathscr{B}$.

**Замечание.** Интуитивно ясно, что свободная статистика не несет никакой информации относительно истинного значения параметра $\theta$. Напротив, достаточная статистика содержит в себе всю информацию (столько информации, сколько и в самом наблюдении) относительно параметра $\theta$. Часто достаточная (и ограниченно полная) статистика $T$ и свободная статистика $U$ дополняют друг друга в том смысле, что отображение $x \mapsto \{T(x), U(x)\}$ биективно (и статистики $T$ и $U$ независимы как случайные величины).

**Теорема Басу.** Пусть $T(x)$ — достаточная ограниченно полная статистика и $U(x)$ — свободная статистика. Тогда статистики $T(x)$ и $U(x)$ независимы.

**Несмещенные оценки с минимальной дисперсией.** Пусть $(X, \mathscr{A}, \mathscr{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta\})$ — статистическая структура, $T(x)$ — достаточная статистика, $D$ — выпуклое множество (возможных решений) векторного пространства, $l(d \mid \theta)$ — функция потерь, выпуклая (вниз) по $d \in D$ для каждого $\theta \in \Theta$.

Каждому решающему правилу (р. п.) $\delta : X \to D$ поставим в соответствие р. п. $\delta^* : X \to D$, полагая

$$\delta^*(x) = g(T(x)), \quad g(T) = E_\theta(\delta(x) \mid T(x) = T) = E_{\theta T}\delta(x).$$

Ясно, что последнее выражение не зависит от $\theta$, так как $T(x)$ есть достаточная статистика. Предполагается, что $\delta$ есть интегрируемая статистика. Тогда

$$E_\theta \delta^*(x) = E_\theta \delta(x) \text{ и } R(\delta^*|\theta) \leqslant R(\delta|\theta) \ \forall\theta.$$

Последнее утверждение следует из неравенства Иенсена. Отметим, что $\delta^*$ зависит от $x$ через $T(x)$. Таким образом, операция усреднения р.п. относительно достаточной статистики образует р. п., при использовании которого риск может только уменьшиться.

Решающее правило $\delta: X \to D$ называется несмещенной оценкой функции $\tau: \Theta \to D$, если $E_\theta \delta(x) = \tau(\theta)$ $\forall\theta$. Тем самым предполагается, что $\delta$ есть интегрируемая статистика.

**Теорема 2.** Всякая (интегрируемая с квадратом) числовая функция от полной достаточной статистики является ($\mathscr{P}$-п.н. единственной) несмещенной оценкой (для своего математического ожидания) с равномерно наименьшим квадратичным риском (т. е. с минимальной дисперсией).

Каждая н.о.м.д. совпадает $\mathscr{P}$-п.н. с функцией от полной достаточной статистики (если последняя существует).

**Пример 1.** Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$, где действительные сл.в. $x_1, \ldots, x_n$ независимы и одинаково распределены согласно ф.р. $F_\theta$. Предположим, что существует полная достаточная статистика $T(x)$ и найдем н.о.м.д. функции $\tau(\theta) = F_\theta(t)$, где $t$ — некоторое число. Оценка

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & x_1 < t, \\ 0, & x_1 \geqslant t \end{cases}$$

является несмещенной, и поэтому искомая оценка есть

$$\delta^*(x) = g(T(x)), \text{ где } g(T) = P_\theta\{x_1 < t \,|\, T(x) = T\}.$$

Полагая

$$\delta^*(x) = F_x^*(t),$$

получим, что функция $t \to F_x^*(t)$ есть ф.р. и для всякого числа $t$ оценка $F_x^*(t)$ является н.о.м.д. для $F_\theta(t)$. Если $g$ есть $F_\theta$-интегрируемая функция для всех $\theta$, то

$$\delta^*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dF_x^*(t)$$

есть н. о. м. д. функции

$$\tau(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dF_\theta(t).$$

**Пример 2.** Пусть $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, сл. в. $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots, y_n$ независимы; $F_a$ есть ф. р. сл. в. $x_1, \ldots, x_m$; $G_b$ есть ф. р. сл. в. $y_1, \ldots, y_n$; параметры $a$ и $b$ неизвестны; $\theta = (a, b)$. Предположим, что $T_1 = T_1(x_1, \ldots, x_m)$, $T_2 = T_2(y_1, \ldots, y_n)$ и $T = (T_1, T_2)$ являются полными достаточными статистиками относительно параметров $a$, $b$ и $\theta = (a, b)$ соответственно. Для всякого числа $t$ обозначим, как в предыдущем примере, через $F_x^*(t)$ н. о. м. д. для $F_a(t)$. Аналогично, обозначим через $G_y^*(t)$ н. о. м. д. для $G_b(t)$. Пусть $P_\theta$ и $P_{x,y}^*$ — вероятностные меры (на плоскости), порождаемые функциями распределения $F_a(t_1) \cdot G_b(t_2)$ и $F_x^*(t_1) \cdot G_y^*(t_2)$ соответственно. Тогда для всякого измеримого множества $A$ на плоскости $\delta^*(x, y) = P_{x,y}^*(A)$ есть н. о. м. д. для $\tau(\theta) = P_\theta(A)$. В частности, если независимые сл. в. $\xi$ и $\eta$ имеют распределения $F_a$ и $G_b$, а независимые сл. в. $\xi^*$ и $\eta^*$ имеют распределения $F_x^*$ и $F_y^*$ соответственно, то

$$\delta^*(x, y) = P_{x,y}^*(\xi^* < \eta^*)$$

есть н. о. м. д. для

$$\tau(\theta) = P_\theta(\xi < \eta).$$

**Часто используемые распределения.**

1) **Хи-квадрат-распределение (Пирсона).** Это есть распределение сл. в.

$$\chi^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2,$$

где сл. в. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и каждая имеет нормальное распределение $N(0, 1)$. Это распределение обозначается $P(n)$ или $\chi^2(n)$. Число $n$ называют числом степеней свободы. Распределение сл. в. $\chi^2$

совпадает с распределением сл. в. $2\xi$, где $\xi$ имеет гамма-распределение $G(n/2)$;

$$E\chi^2 = n,\ \operatorname{var}\chi^2 = 2n.$$

2) **Распределение Стьюдента** ($t$-распределение). Пусть сл. в. $\xi$ и $\eta$ независимы и имеют распределение $N(0, 1)$ и $P(n)$ соответственно. Тогда распределение сл. в.

$$t = \frac{\xi}{(\eta/n)^{1/2}}$$

называют распределением Стьюдента (или $t$-распределением) и обозначают $S(n)$. Плотность этого распределения имеет вид

$$c_n \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},$$

где нормирующий множитель $c_n$ равен

$$c_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi n}},$$

$$Et = 0,\ \operatorname{var} t = n/(n-2) \text{ при } n > 2.$$

При $n = 1$ распределение Стьюдента называют распределением Коши. Отметим, что сл. в. $(1 + t^2/n)^{-1}$ имеет бета-распределение $Be(n/2, 1/2)$.

3) **Распределение Снедекора—Фишера.** Это есть распределение сл. в.

$$\eta = (\xi_1/k_1) : (\xi_2/k_2),$$

где сл. в. $\xi_1$ и $\xi_2$ независимы и имеют распределения $P(k_1)$ и $P(k_2)$ соответственно. Это распределение обозначается $F_{k_1, k_2}$. Плотность этого распределения имеет вид

$$c(k_1, k_2)\, x^{\frac{k_1}{2}-1} \left(1 + \frac{k_1}{k_2} x\right)^{-\frac{k_1+k_2}{2}},$$

где $c(k_1, k_2)$ — нормирующий множитель

$$c(k_1, k_2) = \frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)} \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{k_1}{2}},$$

$$E\eta = \frac{k_2}{k_2 - 2}, \quad \operatorname{var}\eta = \frac{2k_2^2(k_1 + k_2 - 2)}{k_1(k_2 - 2)(k_2 - 4)}.$$

Отметим, что если $\xi$ имеет распределение $\mathrm{Be}(k_1/2, k_2/2)$, то сл. в.

$$\eta = \frac{k_2\xi}{k_1(1-\xi)}$$

имеет распределением $F_{k_1, k_2}$.

Иногда сл. в., имеющую распределение Снедекора — Фишера, обозначают через F и говорят о распределении Фишера. Символ F был введен Снедекором в честь Р. А. Фишера. Сам же Фишер использовал величину $\frac{1}{2}\ln F$.

4) **Логарифмически-нормальное распределение** соответствует распределению сл. в. $\xi$, для которой $\ln\xi$ имеет нормальное распределение $N(0, 1)$.

5) **Экспоненциальное распределение** имеет вид

$$F(x) = P(\xi < x) = 1 - e^{-ax}, \; x \geqslant 0; \; a > 0.$$

Ясно, что сл. в. $a\xi$ имеет гамма-распределение $G(1)$.

6) **Распределение Вейбула**:

$$P(\xi < x) = 1 - e^{-ax^{\lambda}}, \; x \geqslant 0; \; a \geqslant 0, \; \lambda > 0.$$

В случае $\lambda = 2$ оно называется распределением Релея.

7) **Равномерное распределение на отрезке** $[0, 1]$:

$$P(\xi < x) = x, \; 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Ясно, что $\xi$ имеет бета-распределение $\mathrm{Be}(1, 1)$.

8) Часто используется **трехпараметрическое семейство распределений**, определяемое семейством плотностей

$$f(x \mid \alpha, \beta, \gamma) = c(\alpha, \beta, \gamma)\, x^{\alpha} e^{-\beta x^{\gamma}},$$

где $c(\alpha, \beta, \gamma)$ — нормирующий коэффициент.

### ЗАДАЧИ 151—180

151. Пусть наблюдение $x$ подчинено биномиальному распределению $\mathrm{Bi}(n, \theta)$ с неизвестным параметром $\theta$, $0 < \theta < 1$. Предположим, что множеством

возможных решений является $D=R^1$, функция потерь имеет вид

$$L(d|\theta)=\frac{(d-\theta)^2}{\theta(1-\theta)},$$

а априорное распределение параметра $\theta$ является равномерным на (0, 1). Показать, что байесовская решающая процедура единственная и имеет вид $\delta(x)=x/n$, а байесовский риск равен $1/n$.

**152.** Предположим, что распределение наблюдения $(x, y)$ допускает плотность $p(x, y|\theta)$, где $\theta$ — неизвестный параметр. Пусть

$\alpha(\theta)$ — плотность априорного распределения параметра;

$\beta(\theta|x, y)$ — плотность апостериорного распределения параметра;

$\alpha(\theta|x)$ — плотность апостериорного распределения относительно наблюдения $x$;

$\alpha(\theta|x, y)$ — плотность апостериорного распределения относительно наблюдения $y$, если в качестве плотности априорного распределения использовать $\alpha(\theta|x)$.

Показать, что $\beta(\theta|x, y)=\alpha(\theta|x, y)$.
(Тем самым апостериорное распределение можно вычислить поэтапно, по мере получения результатов наблюдения.)

**153.** Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — независимые одинаково распределенные сл. в. с распределением из семейства $\mathcal{F}$. Скажем, что семейство $\mathcal{F}$ согласовано с семейством $\mathcal{F}^*$ распределений на параметрическом пространстве, если из принадлежности к $\mathcal{F}^*$ априорного распределения следует, что и апостериорное распределение принадлежит $\mathcal{F}^*$. Показать, что

1) биномиальное распределение $\mathrm{Bi}(m, \theta)$ согласовано с бета-распределением;

2) отрицательно-биномиальное распределение $\mathrm{Bi}^-(m, \theta)$ согласовано с бета-распределением;

3) пуассоновское распределение $\mathrm{Po}(\theta)$ согласовано с гамма-распределением;

4) экспоненциальное распределение с параметром $\theta$ согласовано с гамма-распределением;

5) равномерное распределение на $(0, \theta)$ согласовано с односторонним распределением Парето;

6) равномерное распределение на интервале $(\theta,$

$\theta_2$) согласовано с двусторонним распределением Парето.

**154.** Пусть $\mathcal{P}=\{P_0, P_1, ..., P_m\}$ — семейство распределений на выборочном пространстве $(X, \mathcal{A})$. Обозначим через $p_k(x)$ плотность распределения $P_k$ относительно некоторой доминирующей меры $\mu$, например $\mu=P_0+P_1+...+P_m$. Предположим, что $p_0(x)>0$ для $x\in X$. Показать, что статистика

$$T(x)=\left\{\frac{p_1(x)}{p_0(x)}, \ldots, \frac{p_m(x)}{p_0(x)}\right\}$$

является достаточной.

**155.** Пусть числовые наблюдения $x_1, ..., x_n$ независимы и каждое имеет одно и то же неизвестное, но непрерывное распределение $F$. Тем самым имеется семейство $\mathcal{P}=\{P\}$ распределений вектора $x=(x_1, ..., x_n)$, соответствующих разным непрерывным одномерным ф. р. $F$. Показать, что порядковая статистика

$$T(x)=\{x_{(1)}, ..., x_{(n)}\}$$

является достаточной. Здесь $x_{(1)}, ..., x_{(n)}$ есть те же $x_1, ..., x_n$, но расположенные в неубывающем порядке.

**156.** (Продолжение.) Показать, что порядковая статистика является полной.

**157.** (Продолжение.) Обозначим через $\hat{F}_x(t)$ эмпирическую ф. р., т. е.

$$\hat{F}_x(t)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e(t-x_k), \text{ где } e(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant 0,\\ 1, & t>0.\end{cases}$$

Показать, что для каждого фиксированного числа $t$ оценка $\delta^*(x)=\hat{F}_x(t)$ является н. о. м. д. для $\tau(F)=F(t)$.

**158.** Рассмотрим статистическую структуру $(X, \mathcal{A}, \mathcal{P}=\{P_\theta, \theta\in\Theta\})$, в которой $X=\{-1, 0, 1, 2, ...\}$, $\mathcal{A}$ — множество всех подмножеств множества $X$, $\Theta=[0, 1)$,

$$P_\theta(-1)=\theta, \quad P_\theta(n)=(1-\theta)^2\theta^n, \quad n=0, 1, 2, \ldots.$$

Показать, что статистика $T(x)=x$ является ограниченно полной, но не полной.

**159.** Сл. в. $x_1, ..., x_n$ независимы и каждая имеет нормальное распределение $N(\mu, \sigma^2)$, $\theta=(\mu, \sigma^2)$. Показать, что статистика

$$T(x)=\left\{\frac{x_1-\bar{x}}{S},\ \ldots,\ \frac{x_n-\bar{x}}{S}\right\}$$

является свободной. Здесь $n\geqslant 2$, $x=(x_1, \ldots, x_n)$,

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_1^n x_k,\quad S=\sum_1^n|x_k-\bar{x}|.$$

**160.** (Продолжение.) Показать, что статистики $\bar{x}$ и $S$ независимы.

Указание. Воспользоваться теоремой Басу.

**161.** Пусть $x$ есть число успехов в серии из $n$ независимых испытаний с постоянной вероятностью $\theta$ успешного испытания. Показать, что

$$t(x)=\sum_{k=0}^n c_k\frac{x^{(k)}}{n^{(k)}}$$

есть н. о. м. д. для $\tau(\theta)=c_0+c_1\theta+\ldots+c_n\theta^n$. Здесь $x^{(k)}=x(x-1)\ldots(x-k+1)$.

**162.** (Продолжение.) Показать, что не существует н. о. для $\tau(\theta)=\theta^N$ при $N>n$.

**163.** Пусть каждая из независимых сл. в. $x_1, \ldots, x_n$ имеет пуассоновское распределение $\mathrm{Po}(\theta)$ с параметром $\theta>0$. Показать, что н. о. м. д. для $\tau(\theta)=\sum_{k\geqslant 0}a_k\theta^k$ служит

$$t(x_1, \ldots, x_n)=\sum_{k=0}^x a_k\frac{x^{(k)}}{n^k},$$

где $x=x_1+\ldots+x_n$, $x^{(k)}=x(x-1)\ldots(x-k+1)$.

**164.** (Продолжение.) Показать, что для $\tau(\theta)=1/\theta$ не существует несмещенной оценки.

**165.** Сл. в. $x_1, \ldots, x_n$ независимы и одинаково распределены согласно $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ с неизвестными $\mu$ и $\sigma>0$. Положим

$$s^2=\frac{1}{(n-1)}\sum_1^n(x_k-\bar{x})^2,\quad s>0,\quad n\geqslant 1,\quad \bar{x}=\frac{1}{n}\sum_1^n x_k.$$

Показать, что

$$\left(\frac{n-1}{2}\right)^{1/2}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot s$$

есть н. о. м. д. для $\sigma$.

**166.** (Продолжение.) Показать, что н. о. м. д. для

$$\tau(\theta)=\sum_{N\geqslant 0} c_N\sigma^N,\quad \theta=(\mu,\ \sigma),$$

служит

$$t(s)=\sum_{N\geqslant 0}\left(\frac{n-1}{2}\right)^{N/2}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N+n-1}{2}\right)}c_N\cdot s^N.$$

**167.** Для определения надежности элемента, время жизни которого подчинено экспоненциальному распределению $1-e^{-\theta x}$, $x\geqslant 0$, с неизвестным параметром $\theta>0$, проводится испытание с $N$ одинаковыми элементами. Испытание проводится до момента $T$ с мгновенной заменой вышедшего из строя элемента. Показать, что н. о. м. д. для надежности $R(t)=e^{-\theta t}$ элемента ($t$ — фиксировано) служит оценка

$$\hat{R}(t)=\left(1-\frac{t}{NT}\right)^{\nu(T)},$$

где $\nu(T)$ — число отказавших элементов до остановки испытания.

**168.** Сл. в. $x_1, \ldots, x_n$ независимы и каждая имеет экспоненциальное распределение $1-e^{-\theta x}$, $x\geqslant 0$, с неизвестным параметром $\theta>0$. Для фиксированного $t\geqslant 0$ положим

$$\tau(\theta)=F_\theta(t)=1-e^{-\theta t}.$$

Показать, что н. о. м. д. для $\tau(\theta)$ служит

$$F_x^*(t)=1-\left(1-\frac{t}{n\bar{x}}\right)_+^{n-1}\quad \text{при } n>1,$$

где $n\bar{x}=x_1+\ldots+x_n$, $(z)_+=\max(0,\ z)$; если же $n=1$, то

$$F_x^*(t)=\begin{cases}0, & \text{если } x_1\geqslant t,\\ 1, & \text{если } x_1<t.\end{cases}$$

**169.** Для определения надежности элемента, время жизни которого подчинено экспоненциальному распределению $1-e^{-\theta x}$, $x \geqslant 0$, с неизвестным параметром $\theta > 0$, проводится испытание с $N$ одинаковыми элементами. Испытание проводится с заменой вышедшего из строя элемента до появления $r$-го отказа.

Показать, что н.о.м.д. для надежности $R(t) = e^{-\theta t}$ элемента ($t$ — фиксировано) служит

$$\hat{R}(t) = \left(1 - \frac{t}{s}\right)_+^{r-1},$$

где $s$ — суммарное время жизни всех испытываемых элементов до момента остановки испытания.

**170.** (Продолжение.) Доказать то же самое утверждение, но для случая, когда испытание проводится без замены вышедшего из строя элемента ($r \leqslant N$).

**171.** Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — независимые сл. в., имеющие экспоненциальное распределение $1-e^{-\theta y}$, $y \geqslant 0$, с неизвестным параметром $\theta > 0$. Показать, что н. о. м. д. для

$$\tau(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{\theta^k}{k!}$$

служит оценка

$$t(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k C_{n-1}^k \frac{1}{x^k}, \quad \text{где} \quad x = x_1 + \ldots + x_n.$$

**172.** (Продолжение.) Показать, что не существует н. о. м. д. для $\tau(\theta) = \theta^N$ при $N \geqslant n$.

**173.** Сл. наблюдения $x_1, \ldots, x_n$ независимы, и каждое имеет нормальное распределение $N(\mu, \sigma^2)$ с неизвестным $\mu$ и $\sigma^2$. Положим для некоторого числа $t$

$$\tau(\theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du = F_\theta(t),$$

$\theta = (\mu, \sigma^2)$. Найти н. о. м. д. для $\tau(\theta)$.

**174.** Сл. наблюдения $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ независимы; при этом для $t \geqslant 0$

$$P_\theta(x_i < t) = 1 - e^{-\theta_1 t}, \quad P_\theta(y_j < t) = 1 - e^{-\theta_2 t},$$

где параметр $\theta=(\theta_1, \theta_2)$ неизвестен; $\theta_1>0$, $\theta_2>0$. Показать, что не существует н. о. м. д. для

$$\tau(\theta)=\theta_1/(\theta_1+\theta_2).$$

**175.** Рассмотрим пуассоновский процесс $\xi(t)$, $t\geqslant 0$, с параметром $\theta>0$ и $\xi(0)=0$ (т. е. однородный процесс $\xi(t)$, $t\geqslant 0$, с независимыми приращениями, у которого $\xi(0)=0$ и $\xi(t)$ имеет пуассоновское распределение с параметром $\theta t$). Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — наблюдения (значения) процесса в заданных точках $t_1<\ldots<t_n$. Показать, что $\widehat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)=x_n/t_n$ есть н. о. м. д. параметра $\theta$.

**176.** Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — наблюдения (значения) винеровского процесса с коэффициентом сноса $a$ и коэффициентом диффузии $\sigma$ в точках $t_1<\ldots<t_n$. Показать, что оценки

$$\widehat{a}=\frac{\sum_1^n \Delta_k y_k}{t_n} \quad \text{и} \quad \widehat{\sigma^2}=\frac{1}{n-1}\sum_1^n \Delta_k (y_k-\widehat{a})^2$$

являются н. о. м. д. для $a$ и $\sigma^2$ соответственно. Здесь

$$\Delta_k=t_k-t_{k-1}, \quad y_k=\frac{x_k-x_{k-1}}{\Delta_k}, \quad t_0=x_0=0.$$

**177.** Сл. в. $x_1, \ldots, x_n$ независимы и одинаково распределены согласно $N(\mu, \sigma^2)$. Положим

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_1^n x_i, \quad S=\sum_1^n (x_i-\bar{x})^2, \quad s^2=\frac{1}{n-1}S.$$

Показать, что при $n>3$ для $\lambda=0, 1, 2, 3$ выполнено

$$E_\theta\left[\frac{1}{n+\lambda}S-\sigma^2\right]^2<E_\theta\,[s^2-\sigma^2]^2$$

для всех $\theta=(\mu, \sigma^2)$.

**178.** (Продолжение.) Показать, что при любом $c\neq\frac{1}{n+1}$ для всех $\theta$ выполнено

$$E_\theta\left[\frac{1}{n+1}S-\sigma^2\right]^2<E_\theta\,[cS-\sigma^2]^2.$$

**179.** Сл. в. $x_1$ и $x_2$ независимы и каждая имеет нормальное распределение $N(0, \sigma^2)$. Показать, что

$$t(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} |x_1 + x_2|, \quad x = (x_1, x_2),$$

есть несмещенная оценка $\sigma$.

**180.** Предположим, что сл. в. $x_1$ и $x_2$ независимы и каждая имеет нормальное распределение $N(\mu, \sigma^2)$. Показать, что

$$t(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} |x_1 - x_2|, \quad x = (x_1, x_2),$$

есть несмещенная оценка $\sigma$.

## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 151—180

**151.** Для произвольной решающей процедуры $\delta$ функция риска равна

$$R(\delta|\theta) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\delta(k) - \theta)^2}{\theta(1-\theta)} C_n^k \theta^k (1-\theta)^{n-k},$$

$$R(\delta) = \int_0^1 R(\delta|\theta)\, d\theta = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \int_0^1 \theta^{k-1} (1-\theta)^{n-k-1} (\delta(k) - \theta)^2 d\theta.$$

Последняя функция является квадратичной формой вектора

$$\delta = (\delta(0), \delta(1), \ldots, \delta(n)) \in R^{n+1}.$$

Минимум квадратичной формы находим обычным образом из условия равенства нулю частных производных

$$\frac{\partial R}{\partial \delta(k)} = C_n^k \int_0^1 \theta^{k-1} (1-\theta)^{n-k-1} \cdot 2(\delta(k) - \theta)\, d\theta = 0,$$

$$\delta(k) = \frac{\int_0^1 \theta^k (1-\theta)^{n-k-1} d\theta}{\int_0^1 \theta^{k-1} (1-\theta)^{n-k-1} d\theta} = \frac{B(k+1, n-k)}{B(k, n-k)} =$$

$$= \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k)}{\Gamma(n+1)} \cdot \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(k)\Gamma(n-k)} = \frac{k}{n},$$

где использовано равенство $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$. При $\delta(k)=k/n$ имеем

$$R(\delta|\theta)=\frac{E\left(\frac{x}{n}-\theta\right)^2}{\theta(1-\theta)}=\frac{\operatorname{var}\frac{x}{n}}{\theta(1-\theta)}=\frac{n\theta(1-\theta)}{n^2\theta(1-\theta)}=\frac{1}{n}.$$

**152.** Условимся писать $f(\theta, u)\cong g(\theta, v)$ для функций от $\theta$ и, возможно, других аргументов $u$ и $v$, если для каждых фиксированных значений $u$ и $v$ существует $c(u, v)$ такое, что

$$f(\theta, u)=c(u, v)g(\theta, v) \text{ для всех } \theta.$$

Имеем в силу формулы Байеса, выражающей апостериорную плотность через априорную,

$$\alpha(\theta|x, y)\cong\alpha(\theta|x)p(y|x, \theta)\cong\alpha(\theta)p(x|\theta)p(y|x, \theta)=$$
$$=\alpha(\theta)p(x, y|\theta)\cong\beta(\theta|x, y),$$

где $p(x|\theta)$ — плотность $x$, $p(y|x, \theta)$ — условная плотность $y$ при фиксированном $x$. Осталось заметить, что если $f(\theta, u)\cong g(\theta, v)$ и при каждых фиксированных $u$, $v$ функции $f$ и $g$ как функции от $\theta$ являются плотностями распределения, то $f(\theta, u)=g(\theta, v)$ для всех $\theta$ (в самом деле, равенство $f(\theta, u)=c(u, v)g(\theta, v)$ и условия нормировки $\int f(\theta, u)d\theta=1$, $\int g(\theta, v)d\theta=1$ (где вместо $d\theta$ может стоять произвольная мера) влекут $c(u, v)=1$).

**153.** Воспользуемся обозначениями предыдущей задачи и замечанием в конце текста ее решения, в силу которого для вычисления плотности известного вида достаточно найти ее с точностью до пропорциональности.

1) $p(x|\theta)\cong\theta^{\Sigma x_i}(1-\theta)^{\Sigma(m-x_i)}$, априорная плотность $\alpha(\theta)\cong\theta^{p-1}(1-\theta)^{q-1}$, апостериорная плотность находится по формуле Байеса:

$$\alpha(\theta|x)\cong\alpha(\theta)p(x|\theta)\cong\theta^{p+\Sigma x_i-1}(1-\theta)^{q+\Sigma(m-x_i)-1},$$

т. е. $\alpha(\theta|x)$ есть плотность Be $(p+\Sigma x_i,\ q+\Sigma(m-x_i))$.

2) $p(x|\theta)\cong\theta^{nm}(1-\theta)^{\Sigma x_i}$, $\alpha(\theta)\cong\theta^{p-1}(1-\theta)^{q-1}$,

$$\alpha(\theta|x)\cong\theta^{p+nm-1}(1-\theta)^{q+\Sigma x_i-1},$$

т. е. $\alpha(\theta \mid x)$ есть плотность $\mathrm{Be}(p+m\iota, q+\Sigma x_i)$.

3) $p(x \mid \theta) \cong \theta^{\Sigma x_i} e^{-n\theta}$, $\alpha(\theta) \cong \theta^{p-1} e^{-\lambda\theta}$,

$$\alpha(\theta \mid x) \cong \theta^{p+\Sigma x_i - 1} e^{-(n+\lambda)\theta},$$

т. е. $\alpha(\theta \mid x)$ есть плотность $\mathrm{G}(p+\Sigma x_i,\ n+\lambda)$.

4) $p(x \mid \theta) \cong \theta^n e^{-\theta \Sigma x_i}$, $\alpha(\theta) \cong \theta^{p-1} e^{-\lambda\theta}$,

$$\alpha(\theta \mid x) \cong \theta^{n+p-1} e^{-(\lambda+\Sigma x_i)\theta},$$

т. е. $\alpha(\theta \mid x)$ есть плотность $\mathrm{G}(p+n,\ \lambda+\Sigma x_i)$.

5) $p(x \mid \theta) \cong \theta^{-n} I_{(\max x_i, \infty)}(\theta)$, $\alpha(\theta) \cong \theta^{-\alpha-1} I_{(\theta_0, \infty)}(\theta)$,

$$\alpha(\theta \mid x) \cong \theta^{-n-\alpha-1} I_{(\max(\theta_0, x_i), \infty)}(\theta),$$

т. е. $\alpha(\theta \mid x)$ есть плотность одностороннего распределения Парето с параметрами $n+\alpha$ и $\max(\theta_0, x_1, \ldots, x_n)$.

6) $p(x \mid \theta) \cong (\theta_2-\theta_1)^{-n} I_{(-\infty, \min x_i)}(\theta_1) \cdot I_{(\max x_i, \infty)}(\theta_2)$,

$$\alpha(\theta) \cong (\theta_2-\theta_1)^{-\alpha-2} I_{(-\infty, r_1)}(\theta_1) \cdot I_{(r_2, \infty)}(\theta_2),$$

$$\alpha(\theta \mid x) \cong (\theta_2-\theta_1)^{-\alpha-n-2} I_{(-\infty, \min(r_1, x_i))}(\theta_1) \cdot I_{\max(r_2, x_i), \infty)}(\theta_2),$$

т. е. $\alpha(\theta \mid x)$ есть плотность двустороннего распределения Парето с параметрами $\alpha+n$ и $\min(r_1, x_1, \ldots, x_n) < \max(r_2, x_1, \ldots, x_n)$, так как $r_1 < r_2$.

**154.** Здесь параметр структуры $k \in \Theta = \{0, 1, \ldots, m\}$, функция правдоподобия имеет вид

$$L(x \mid k) = p_k(x) = (p_k(x)/p_0(x))\, p_0(x) = g_k(T(x))\, h(x),$$

где

$$g_k(t_1, \ldots, t_m) = t_k, \quad h(x) = p_0(x).$$

Следовательно, в силу критерия факторизации $T$ — достаточная статистика.

**155. Решение 1** при дополнительном предположении абсолютной непрерывности распределения $F$: $dF(x) = p(x)\,dx$. Можно считать выборочное пространство равным $X = \{(x_1, \ldots, x_n) \in R^n$: все $x_i$ различны$\}$ с $\sigma$-алгеброй борелевских множеств. Рассмотрим еще пространства $Y = \{(y_1, \ldots, y_n) \in R^n : y_1 < y_2 < \ldots < y_n\}$ с борелевской $\sigma$-алгеброй и $Z = \{z = (i_1, \ldots, i_n)$: перестановка чисел $1, \ldots, n\}$ с $\sigma$-алгеброй всех подмножеств. Тогда биекция

$$X \ni x \leftrightarrow (y, z) \in Y \times Z,$$

где $x_k = y_{i_k}$, $k = \overline{1, n}$, измерима в обе стороны, $y = T(x) = \{x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}\}$ — порядковая статистика, $z = S(x)$ — перестановка, обратная (как элемент группы перестановок чисел 1, 2, ..., $n$) перестановке, применение которой к $x_1, \ldots, x_n$ дает $x_{j_i} = y_i$. Используем, что мера Лебега в $X$ (объем в $R^n$) является произведением меры Лебега в $Y$ и равномерной меры в $Z$ ($|C|$ — число элементов множества $C \subset Z$). Тогда по формуле Байеса условная плотность $z$ при фиксированном $y$ есть

$$p(z \mid y) = \frac{p(y, z)}{p(y)}, \quad p(y) = \sum p(y, z) = \sum_{z \in Z} p(x) = n!\, p(x),$$

$$p(z \mid y) = 1/n!,$$

где использовано, что $p(x_1, \ldots, x_n) = p(x_1) \ldots p(x_n) = p(x_{j_1}, \ldots, x_{j_n})$ для любой перестановки $(j_1, \ldots, j_n)$ и, следовательно, $p(y, z)$ не зависит от $z$. Следовательно, условное распределение вектора наблюдений $x = (x_1, \ldots, x_n)$ при фиксированном значении статистики $T(x) = y$ сосредоточено на множестве $\{(y, z) : z \in Z\}$ из $n!$ элементов и приписывает каждому элементу вероятность $1/n!$ Согласно определению статистика $T$ достаточна. (Решение упрощается, если воспользоваться критерием факторизации, так как

$$p(x_1, \ldots, x_n) = p(x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}),$$

т. е. функция правдоподобия (роль параметра $\theta$ играет плотность распределения $F$) зависит от вектора $x$ через $T(x)$.)

**Решение 2.** В общем случае опять используем биекцию $X \leftrightarrow Y \times Z$. Покажем, что для каждого борелевского множества $A \subset X$

$$P(x \in A \mid y) = |A_y|/n!, \quad \text{где} \quad A_y = \{z \in Z:\ z = (i_1, \ldots, i_n),$$
$$(y_{i_1}, \ldots, y_{i_n}) \in A\}.$$

Имеем для произвольного борелевского множества $B \subset Y$

$$P(x \in A,\ y \in B) = \sum_{(j_1,\ldots,j_n)\in Z} P\{(x_1, \ldots, x_n) \in A,$$

$$x_{j_1} < x_{j_2} < \ldots < x_{j_n},\ (x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}) \in B\} =$$

$$= \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in Z} P\{(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \in A,$$

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n,\ (x_1, \ldots, x_n) \in B\} =$$

$$= \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in Z} P\{(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \in A,\ (x_1, \ldots, x_n \in B\} =$$

$$= \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in Z} \int_B I_{\{(i_1,\ldots,i_n)\in A_x\}}(x)\, P(dx) =$$

$$= \int_B \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in Z} I_{\{(i_1,\ldots,i_n)\in A_x\}}(x)\, P(dx) = \int_B |A_x|\, P(dx).$$

При $A = X$ получим для $G(B) = P(y \in B)$

$$G(B) = \int_B n!\, P(dx) = n!\, P(B).$$

Тем самым

$$P(x \in A,\ y \in B) = \int_B \frac{|A_y|}{n!}\, G(dy).$$

Таким образом, согласно определению условной вероятности $P(x \in A \mid y) = |A_y|/n!$. Последнее означает достаточность статистики $T(x) = y$.

**156.** Обозначим $\mathscr{F}$ множество одномерных непрерывных ф. р. $F$. Для доказательства полноты порядковой статистики $T(x) = (x_{(1)}, \ldots, x_{(n)})$ достаточно показать, что если $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — действительная симметричная борелевская функция, т. е. для всех перестановок $(i_1, \ldots, i_n)$,

$$\varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) = \varphi(x_1, \ldots, x_n),$$

такая, что

$$\int \ldots \int \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, dF(x_1) \ldots dF(x_n) = 0 \quad \forall F \in \mathscr{F},$$

то $\varphi = 0$ почти наверное относительно $dF(x_1) \ldots dF(x_n)$ $\forall F \in \mathscr{F}$.

Покажем сначала, что

$$\int\ldots\int\varphi(x_1, \ldots, x_n)\,dF_1(x_1)\ \ldots dF_n(x_n)=0\quad\forall F_1, \ldots, F_n\in\mathcal{F}.$$

С этой целью рассмотрим для произвольных $F_1, \ldots, F_n\in\mathcal{F}$ и $p_1>0, \ldots, p_n>0, \sum_{i=1}^{n} p_i=1$ функцию распределения $F=\sum_{i=1}^{n} p_iF_i\in\mathcal{F}$. Имеем

$$0=\int\ldots\int\varphi(x_1, \ldots, x_n)\,dF(x_1)\ldots dF(x_n)=$$

$$=\sum_{1\leqslant l_1, \ldots, l_n\leqslant n} p_{l_1}p_{l_2}\ldots p_{l_n}\int\ldots\int\varphi(x_1, \ldots, x_n)\,dF_{l_1}(x_1)\ldots$$

$$\ldots\,dF_{l_n}(x_n)=\sum_{\substack{k_i\geqslant 0\\ \sum_{i=1}^{n} k_i=n}} p_1^{k_1}\ldots p_n^{k_n}\frac{n!}{k_1!\ldots k_n!}\int\ldots$$

$$\ldots\int\varphi(x_1, \ldots, x_n)\,dF_1(x_1)\ \ldots\ dF_1(x_{k_1})\ \ldots$$

$$\ldots\ dF_n(x_{k_1+\ldots+k_{n-1}+1})\ \ldots\ dF_n(x_n).$$

Умножая полученное равенство на произвольное положительное число, можем снять ограничение $\sum_{i=1} p_i=1$ и считать $p_1, \ldots, p_n$ произвольными положительными числами. Следовательно, коэффициенты полинома равны нулю, откуда

$$\int\ldots\int\varphi(x_1, \ldots, x_n)\,dF_1(x_1)\ldots dF_1(x_{k_1})\,dF_2(x_{k_1+1})\ldots$$

$$\ldots\,dF_2(x_{k_1+k_2})\ldots dF_n(x_{k_1+\ldots+k_n+1})\ldots dF_n(x_n)=0,$$

в частности,

$$0=\int\ldots\int\varphi(x_1, \ldots, x_n)\,dF_1(x_1)\ldots dF_n(x_n).$$

(получается при $k_1=k_2=\ldots=k_n=1$). Умножая полученное равенство на положительное число, получим

$$\int\ldots\int\varphi(x_1, \ldots, x_n)\,d\mu_1(x_1)\ldots d\mu_n(x_n)=0$$

для всех неотрицательных конечных непрерывных мер. В частности, для произвольных действительных чисел $t_1, \ldots, t_n$ и $F \in \mathfrak{F}$ при $d\mu_j(x_j) = \psi_j(x_j)\,dF(x_j)$, где $\psi_j(x_j) = (\cos t_j x_j)^+ dF(x_j)$ или $\psi_j(x_j) = (\sin t_j x_j)^+ dF(x_j)$, получим

$$\mathrm{Re}^+ \int \ldots \int \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, e^{it_1x_1} \ldots e^{it_nx_n}\, dF(x_1) \ldots dF(x_n) = 0,$$

где $\mathrm{Re}^+$ — положительная часть действительной части комплексного числа. Аналогичные равенства получаем для $\mathrm{Re}^-$, $\mathrm{Im}^+$, $\mathrm{Im}^-$, откуда

$$\int \ldots \int \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, e^{it_1x_1} \ldots e^{it_nx_n}\, dF(x_1) \ldots dF(x_n) = 0,$$

следовательно,

$$\int \ldots \int \varphi^+(x_1, \ldots, x_n)\, e^{i(t_1x_1 + \ldots + t_nx_n)}\, dF(x_1) \ldots dF(x_n) =$$

$$= \int \ldots \int \varphi^-(x_1, \ldots, x_n)\, e^{i(t_1x_1 + \ldots + t_nx_n)}\, dF(x_1)] \ldots dF(x_n),$$

т. е. характеристические функции конечных неотрицательных мер

$$\varphi^+(x_1, \ldots, x_n)\, dF(x_1) \ldots dF(x_n) \text{ и}$$
$$\varphi^-(x_1, \ldots, x_n)\, dF(x_1) \ldots dF(x_n)$$

равны, следовательно равны меры и тем самым равны плотности $\varphi^+$ и $\varphi^-$ этих мер относительно $dF(x_1) \ldots dF(x_n)$ почти наверное, т. е. равна нулю разность $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ почти наверное относительно $dF(x_1) \ldots dF(x_n)$.

**157.** Эмпирическая ф. р.

$$\hat{F}_x(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e(t - x_k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e(t - x_{(k)})$$

есть функция (при каждом фиксированном $t$) полной достаточной статистики $T(x_1, \ldots, x_n) = (x_{(1)}, \ldots, x_{(n)})$ (в силу задач 155, 156). Для решения задачи достаточно проверить несмещенность. Имеем

$$E\hat{F}_x(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} Ee(t - x_k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P(x_k < t) = F(t).$$

158. Для интегрируемой статистики вида $f(T(x))$ с нулевым математическим ожиданием имеем

$$0 = E_\theta f(T(x)) = E_\theta f(x) = f(-1)\theta + \sum_{n\geqslant 0} f(n)(1-\theta)^2\theta^n,$$
$$0 \leqslant \theta < 1.$$

При $\theta = 0$ получим $f(0) = 0$. Следовательно,

$$f(-1)\theta + (1-\theta)^2 \sum_{n\geqslant 1} f(n)\theta^n = 0, \quad 0 < \theta < 1,$$

т. е.

$$\sum_{n\geqslant 1} f(n)\theta^{n-1} = -\frac{f(-1)}{(1-\theta)^2} = -f(-1)\sum_{n\geqslant 1} n\theta^{n-1}, \quad 0<\theta<1,$$

причем ряд в левой части сходится абсолютно (в силу $E_\theta|f(x)|<\infty$), откуда

$$f(n) = -f(-1)n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Если статистика ограничена, то $f(n) = 0$ $\forall n$. Следовательно, $T$ — ограниченно полная статистика. Положим, например, $f(-1) = -1$; $f(n) = n$, $n \geqslant 1$, получим ненулевую несмещенную оценку нуля, т. е. статистика $T$ не является полной.

159. Можно считать $x_i = \sigma\xi_i + \mu$, $i = \overline{1, n}$, где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и каждая имеет стандартное нормальное распределение $N(0, 1)$. Имеем

$$T(x_1, \ldots, x_n) = T(\xi_1, \ldots, \xi_n),$$

откуда видно, что распределение статистики $T$ не зависит от $\sigma$ и $\mu$, т. е. статистика свободна.

160. При каждом фиксированном $\sigma$ статистики $\bar{x}$ и $s$ являются соответственно полной достаточной (следует из общего результата для экспоненциальных структур) и свободной (см. текст решения предыдущей задачи). По теореме Басу $\bar{x}$ и $s$ независимы для всех $\mu$. Так как $\sigma$ произвольно, то $\bar{x}$ и $s$ независимы.

161. В силу полноты достаточной статистики $T(x) = x$ достаточно проверить несмещенность оценки $t(x)$. Положим для $|z| \leqslant 1$

$$p(z) = E_\theta z^x = \sum_{x=0}^{n} C_n^x \theta^x (1-\theta)^{n-x} z^x = [z\theta + (1-\theta)]^n.$$

Тогда

$$\frac{d^k}{dz^k} p(z)|_{z=1} = n^{(k)}\theta^k [z\theta + (1-\theta)]^{n-k}|_{z=1} = n^{(k)}\theta^k =$$

$$= \sum_{x=0}^{n} C_n^x \theta^x (1-\theta)^{n-x} x(x-1)\ldots(x-k+1)\, z^{x-k}|_{z=1} = E_\theta x^{(k)},$$

т. е. $E_\theta \frac{x^{(k)}}{n^{(k)}} = \theta^k$, $k = \overline{0, n}$, откуда и следует несмещенность оценки $t(x)$.

**162.** Если $t(x)$ — искомая оценка, то

$$E_\theta t(x) = \sum_{k=0}^{n} t(k) C_n^k \theta^k (1-\theta)^{n-k} = \theta^N, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1,$$

но слева стоит многочлен степени $n < N$.

**163.** Так как статистика $x = x_1 + \ldots + x_n$ является полной и достаточной, то достаточно лишь найти н.о. для $\tau(\theta)$ как функцию от $x$. Пусть $t_k(x)$ — н.о. для $\theta^k$. Так как $x$ есть сумма $n$ независимых сл.в., одинаково распределенных по пуассоновскому закону с параметром $\theta$, то сл.в. $x$ имеет пуассоновское распределение с параметром $\lambda = n\theta$. Имеем

$$E_\theta t_k(x) = \sum_{x \geqslant 0} t_k(x) \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = \theta^k = \frac{1}{n^k} \lambda^k$$

или

$$\sum_{x \geqslant 0} \frac{t_k(x)}{x!} \lambda^x = \frac{1}{n^k} \lambda^k e^\lambda = \frac{1}{n^k} \sum_{x \geqslant k} \frac{\lambda^x}{(x-k)!},$$

откуда, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\lambda^x$, получим

$$t_k(x) = \begin{cases} \dfrac{x!}{n^k (x-k)!} = \dfrac{x^{(k)}}{n^k} & \text{при} \quad x \geqslant k, \\ 0 & \text{при} \quad x < k, \end{cases}$$

т. е. $t_k(x) = x^{(k)}/n^k$ (так как $x^{(k)} = 0$ при $x < k$). Осталось заметить, что н.о. для $\tau(\theta)$ служит

$$t(x) = \sum_{k>0} a_k t_k(x).$$

**164.** Если $t=t(x_1, \ldots, x_n)$ есть н.о. $\tau(\theta)$, то

$$E_\theta t = \sum_{x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0} \frac{t(x_1, \ldots, x_n)}{x_1! \ldots x_n!} \theta^{x_1+\ldots+x_n} e^{-n\theta} =$$

$$= e^{-n\theta} \sum_{k \geqslant 0} c_k \theta^k = 1/\theta \quad \forall \theta > 0,$$

где

$$c_k = \sum_{\substack{x_1+\ldots+x_n=k \\ x_i \geqslant 0}} \frac{t(x_1, \ldots, x_n)}{x_1! \ldots x_n!}.$$

Но тождество

$$\sum_{k \geqslant 0} c_k \theta^k = \frac{1}{\theta} e^{n\theta}$$

по $\theta > 0$ невозможно.

**165.** См. решение следующей задачи.

**166.** В силу полноты достаточной статистики $T(x) = (\bar{x}, s)$ достаточно показать, что

$$E_\theta s^N = \sigma^N \left(\frac{2}{n-1}\right)^{\frac{N}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{N+n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}.$$

Положим

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_1^n (x_k - \bar{x})^2, \quad \chi \geqslant 0.$$

Сл. в. $\chi^2$ имеет хи-квадрат распределение с $m=n-1$ степенями свободы. Это распределение совпадает с распределением сл. в. $2\xi$, где $\xi$ имеет гамма-распределение $G(m/2)$, т. е.

$$P(\chi^2 < t) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^{t/2} u^{\frac{m}{2}-1} e^{-u}\, du.$$

Следовательно,

$$E\chi^N = E[\chi^2]^{\frac{N}{2}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) 2^{\frac{m}{2}}} \int_0^\infty t^{\frac{N}{2}} t^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}}\, dt =$$

$$= \frac{2^{\frac{N+m}{2}} \Gamma\left(\frac{N+m}{2}\right)}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{1}{2^{\frac{N+m}{2}} \Gamma\left(\frac{N+m}{2}\right)} t^{\frac{N+m}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}}\, dt.$$

Последний интеграл равен единице, т. е.

$$E\chi^N = 2^{\frac{N}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{N+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}.$$

Остается воспользоваться равенством

$$E_\theta s^N = \frac{\sigma^N}{(n-1)^{N/2}} E\chi^N.$$

**167**. Проверим сначала, что статистика $\nu(T)$ является достаточной и полной.

Если $\nu(T) = r$ и $x_1, \ldots, x_r$ — моменты выхода из строя элементов до момента $T$, то сл.в. $x_1, \ldots, x_r$ независимы и каждая имеет равномерное распределение в $[0, T]$ (почему?). Следовательно, $\nu(T)$ есть достаточная статистика.

Сл.в. $\nu(T)$ имеет пуассоновское распределение с параметром $\lambda = N\theta \cdot T$, и, значит, статистика является полной (почему?).

Остается убедиться, что $\hat{R}(t)$ есть н.о. для $R(t)$.

$$E_\theta \hat{R}(t) = \sum_{r \geqslant 0} \left(1 - \frac{t}{NT}\right)^r \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} e^{\lambda - \lambda \frac{t}{NT}} =$$

$$= e^{-\lambda \frac{t}{NT}} = e^{-\theta t} = R(t).$$

**168**. Статистика $\bar{x}$ является достаточной и полной. Поэтому достаточно найти н.о. для $\tau(\theta)$ как функцию от $\bar{x}$. Оценка

$$\delta = \delta(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{при } x_1 < t, \\ 0 & \text{при } x_1 \geqslant t \end{cases}$$

является н. о. для $\tau(\theta)$. Такой же будет и оценка

$$\delta^*(\bar{x}) = E_\theta\{\delta \mid x_1 + \ldots + x_n = n\bar{x}\},$$

которая, следовательно, и будет искомой. Имеем

$$\delta^*(\bar{x}) = P_\theta(x_1 < t \mid x_1 + \ldots + x_n = n\bar{x}) =$$

$$= P_\theta\left(\frac{x_1}{x_1 + \ldots + x_n} < \frac{t}{n\bar{x}} \,\middle|\, \bar{x}\right).$$

Так как сл. в.

$$\frac{x_1}{x_1 + \ldots + x_n} \quad \text{и} \quad x_1 + \ldots + x_n$$

независимы (по теореме Басу), то

$$\delta^*(\bar{x}) = P_\theta\left(\frac{x_1}{x_1 + \ldots + x_n} < \frac{t}{n\bar{x}}\right),$$

причем правая часть не зависит от $\theta$ и можно считать, в частности, что $\theta = 1$. Осталось заметить, что сл. в. $x_1/(x_1 + \ldots + x_n)$ имеет бета-распределение $\mathrm{Be}(1, n-1)$. (Действительно, если сл. в. $\xi_1$ и $\xi_2$ независимы и имеют гамма-распределения $\Gamma(\lambda_1)$ и $\Gamma(\lambda_2)$, то сл. в. $\xi_1/(\xi_1 + \xi_2)$ имеет бета-распределение $\mathrm{Be}(\lambda_1, \lambda_2)$. В данном случае сл. в. $\xi_1 = x_1$ и $\xi_2 = x_2 + \ldots + x_n$, $n \geqslant 1$, независимы и имеют гамма-распределения $\Gamma(1)$ и $\Gamma(n-1)$ соответственно.)

**169.** Пусть $y_1, \ldots, y_r$ — длительности последовательно расположенных интервалов между соседними моментами выхода из строя элементов. Тогда сл. в. $y_1, \ldots, y_r$ независимы, и каждая имеет экспоненциальное распределение $1 - e^{-N\theta y}$, $y \geqslant 0$. (Почему?) При этом

$$s = N(y_1 + \ldots + y_r).$$

Положим $x_k = Ny_k$, $k = \overline{1, r}$. Тогда сл. в. $x_1, \ldots, x_r$ независимы и каждая имеет распределение $1 - e^{-\theta x}$, $x \geqslant 0$. При этом

$$s = x_1 + \ldots + x_n.$$

Согласно задаче 18 оценка $\hat{R}(t) = 1 - F_s^*(t)$ является н. о. м. д. для $R(t) = 1 - F_\theta(t)$.

**170.** См. решение предыдущей задачи. В данном случае сл. в. $y_1, \ldots, y_r$ независимы и сл. в. $y_k$ имеет экспоненциальное распределение

$$1-\exp\{-(N-k+1)\theta y\},\ y\geqslant 0;$$

при этом

$$s=Ny_1+(N-1)y_1+\ldots+(N-r+1)y_r.$$

В остальном решение такое же, если положить

$$x_k=(N-k+1)y_k,\quad k=\overline{1,\ r}.$$

**171.** Так как статистика $x=x_1+\ldots+x_n$ является достаточной и полной, то достаточно показать, что

$$E_\theta\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}\frac{1}{x^k}=\theta^k,\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

В самом деле, так как сл. в. $\theta x$ имеет гамма-распределение $G(n)$ как сл. в., равная сумме независимых сл. в. $\theta x_k$, $k=1, \ldots, n$, имеющих гамма-распределение $G(1)$, то левая часть равна

$$\int_0^\infty\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}\frac{1}{x^k}\theta^n\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\theta x}dx=$$

$$=\theta^k\int_0^\infty\theta^m\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\theta x}dx=\theta^k,\quad m=n-k\geqslant 1.$$

**172.** Если искомая оценка существует, то она зависит от $x_1, \ldots, x_n$ через достаточную статистику $x=x_1+\ldots+x_n$. Обозначим эту оценку через $t(x)$. Сл. в. $\theta x$ имеет гамма-распределение $G(n)$, поэтому

$$E_\theta t(x)=\int_0^\infty t(x)\theta^n\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\theta x}dx=\theta^N,\quad \theta>0,$$

или

$$\int_0^\infty f(x)e^{-\theta x}dx=\theta^{N-n},\quad \theta>0,\quad N-n\geqslant 0,$$

где $f(x)=t(x)x^{n-1}/(n-1)!$. Продифференцируем $m=N-n+1\geqslant 1$ раз левую и правую части последнего тождества по $\theta$ (показать корректность дифференцирования под знаком интеграла!). Получим

$$\int_0^\infty f(x)\, x^m e^{-\theta x}\, dx = 0, \quad \theta > 0,$$

откуда $f(x) = 0$ почти всюду при $x \geqslant 0$, т. е. $t(x) = 0$ почти всюду. Следовательно, $E_\theta t(x) = 0 \neq \theta^N$, $\theta > 0$.

**173.** Эмпирическая ф. р. $F_x(t)$ при каждом фиксированном $t$ является полной достаточной статистикой (см. текст решения задачи 157; если статистическую структуру обозначить $\mathcal{P}$, а структуру задачи 157 — $\widetilde{\mathcal{P}}$, то $\mathcal{P} \subset \widetilde{\mathcal{P}}$ и, следовательно, достаточность для $\widetilde{\mathcal{P}}$ влечет достаточность для $\mathcal{P}$; полнота доказывается аналогично). Итак, осталось проверить несмещенность. Но последняя следует из несмещенности для более общей структуры задачи 157.

**175.** Согласно определению пуассоновского процесса, сл. величины

$$y_1 = x_1, \; y_2 = x_2 - x_1, \; \ldots, \; y_n = x_n - x_{n-1}$$

независимы и имеют пуассоновские распределения с параметрами

$$\theta t_1, \; \theta(t_2 - t_1), \; \ldots, \; \theta(t_n - t_{n-1})$$

соответственно. Случайные величины $y_1, \ldots, y_n$ можно считать наблюдениями. Положим еще $y_0 = 0$. Тогда

$$L(y \mid \theta) = \prod_{i=1}^{n} \left[ \frac{\theta^{y_i} (t_i - t_{i-1})^{y_i}}{y_i!} e^{-\theta(t_i - t_{i-1})} \right] =$$

$$= \theta^{\Sigma y_i} e^{-\theta t_n} \prod_{i=1}^{n} \frac{(t_i - t_{i-1})^{y_i}}{y_i!} = C(\theta)\, e^{x_n \ln \theta}\, h(y).$$

Следовательно, рассматриваемая статистическая структура экспоненциальная и статистика $T(x_1, \ldots, x_n) = x_n/t_n = \Sigma y_i/t_n$ — полная достаточная. Осталось проверить ее несмещенность. Последняя следует из того, что $x_n$ имеет пуассоновское распределение с параметром $\theta t_n$, откуда $E_\theta x_n = \theta t_n$, $E_\theta T = \theta$.

**176.** Случайные величины $y_1, \ldots, y_n$ можно считать наблюдениями. Они независимы, сл. в. $y_k$ имеет нормальное распределение $N(a, \sigma^2/\Delta_k)$. (Это следует из определения винеровского процесса.)

$$L(y \mid \theta) = \frac{\left(\prod_{k=1}^{n} \Delta_k\right)^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^{n} \Delta_k (y_k - a)^2 \right\} =$$

$$= C(\theta) \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \Sigma \Delta_k y_k^2 + \frac{a}{\sigma^2} \Sigma \Delta_k y_k \right\}.$$

Структура экспоненциальная. Полной достаточной статистикой является

$$T(y) = (\Sigma \Delta_k y_k^2,\ \Sigma \Delta_k y_k) = (T_1,\ T_2).$$

Проверим, что $\hat{a}$ и $\hat{\sigma}^2$ — функции от $T$. Имеем $\hat{a} = T_2/t_n$,

$$(n-1)\hat{\sigma}^2 = \sum_1^n \Delta_k (y_k^2 - 2y_k\hat{a} + \hat{a}^2) =$$

$$= \Sigma \Delta_k y_k^2 - 2\Sigma \Delta_k y_k \hat{a} + t_n \hat{a}^2 = \Sigma \Delta_k y_k^2 - t_n \hat{a}^2 =$$

$$= T_1 - T_2^2/t_n.$$

Оценки $\hat{a}$ и $\hat{\sigma}^2$ несмещенные, так как

$$E\hat{a} = \sum_{k=1}^n \Delta_k a/t_n = a,\ (n-1)E\hat{\sigma}^2 = \sum_{k=1}^n \Delta_k E y_k^2 - t_n E\hat{a}^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^n \Delta_k (\operatorname{var} y_k + (Ey_k)^2) - t_n (\operatorname{var} (\Sigma \Delta_k y_k/t_n) + a^2) =$$

$$= \sum_{k=1}^n \Delta_k (\sigma^2/\Delta_k + a^2) - t_n [\Sigma \Delta_k^2 (\sigma^2/\Delta_k)/t_n^2 + a^2] =$$

$$= n\sigma^2 + t_n a^2 - \sigma^2 - t_n a^2 = (n-1)\sigma^2.$$

177. Положим

$$P(c) = \frac{1}{\sigma^4} E_\theta [c \cdot S - \sigma^2]^2 = E_\theta \left[ c \cdot \frac{S}{\sigma^2} - 1 \right]^2,$$

но

$$S/\sigma^2 = \chi^2(n-1),$$

и так как

$$E\chi^2(m) = m,\quad \operatorname{var} \chi^2(m) = 2m,\quad E[\chi^2(n-1)]^2 = n^2 - 1,$$

то

$$P(c) = (n^2-1)c^2 - 2(n-1)c + 1.$$

График функции $y \in P(c)$ изображен на рис. 8. Та-

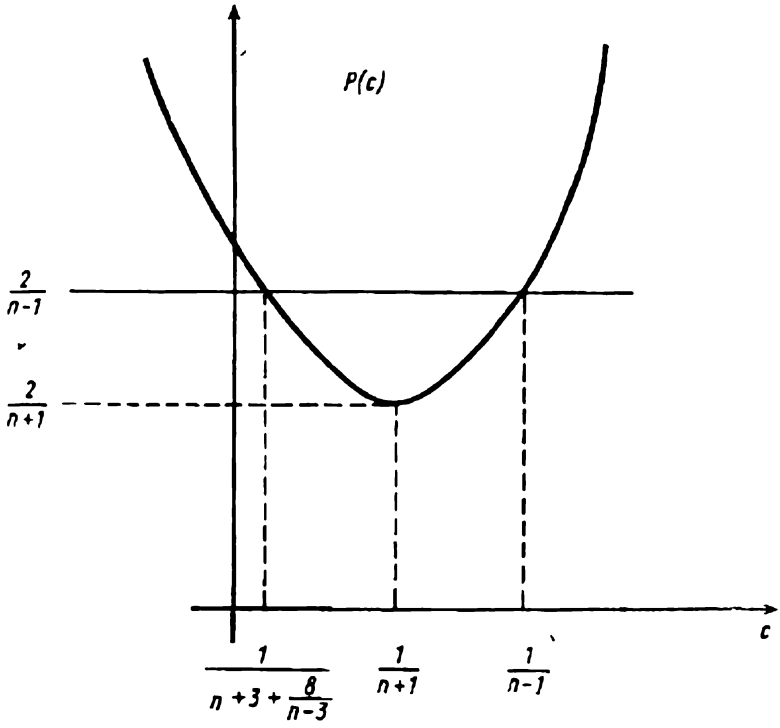



Рис. 8

ким образом, приведенное в задаче неравенство выполнено для всех $\lambda \in (-1, 3+8/(n-3))$.

**178**. Минимум функции $P(c)$, см. решение предыдущей задачи, достигается в точке $c=1/(n+1)$.

**179**. Сл. в. $\xi = x_1 + x_2$ имеет нормальное распределение $N(0, \sigma_0^2)$, где $\sigma_0^2 = 2\sigma^2$. Осталось проверить, что

$$E|\xi| = \sigma_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Последнюю формулу достаточно проверить для $\sigma_0 = 1$. Имеем:

$$E|\xi| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2 \int_0^\infty x e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} d\frac{x^2}{2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

**180.** Сл. в. $\xi = x_1 - x_2$ имеет нормальное распределение $N(0, \sigma_0^2)$, где $\sigma_0^2 = 2\sigma^2$. Так как $E|\xi| = \sigma_0\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, см. решение предыдущей задачи, то

$$E|\xi| = \sqrt{2}\,\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\sigma.$$

## § 2. НЕРАВЕНСТВО КРАМЕРА — РАО. ЭФФЕКТИВНЫЕ ОЦЕНКИ. ОЦЕНКИ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

**Несмещенная оценка с минимальной дисперсией.** Пусть $(X, \mathscr{A}, \mathscr{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta\})$ — статистическая структура и $\tau$ — некоторое отображение $\Theta$ в $R^m$. Статистика $t$ со значениями в $R^m$ называется **оценкой** функции $\tau$.

Оценка $t$ функции $\tau$ называется **несмещенной**, если

$$E_\theta t(x) = \tau(\theta) \quad \forall \theta,$$

где $E_\theta$ есть оператор математического ожидания при условии, что сл. в. $x$ имеет распределение $P_\theta$.

Как правило, одно лишь требование несмещенности не выделяет оценку $t$ однозначно. Другим часто используемым требованием к оценкам является требование минимума дисперсии этой оценки. Пусть $\Delta$ — класс несмещенных оценок. Оценка $t \in \Delta$ называется **несмещенной оценкой с минимальной дисперсией** (н. о. м. д.), если

$$\operatorname{var}_\theta t \leqslant \operatorname{var}_\theta t' \quad \forall \theta \in \Theta,\ t' \in \Delta.$$

Уже эти требования, как правило, выделяют оценку $t$ однозначно, если такая оценка вообще существует. Существование же н. о. м. д. имеет место далеко не всегда, так как дисперсия для таких оценок должна быть минимальной равномерно по $\theta$. Это обстоятельство является, пожалуй, самым серьезным аргументом против таких сильных требований. Отметим, что если $m > 1$ и $t = (t_1, \ldots, t_m)'$, $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_m)'$, то

$$\operatorname{var}_\theta t = E_\theta (t - \tau)(t - \tau)' = \{\operatorname{cov}(t_i, t_j)\},$$

а неравенство $A \leqslant B$ для матриц $A$ и $B$ одинаковой размерности означает, что матрица $B - A$ неотрицательно определенная ($B - A \geqslant 0$).

Пусть $t_1$ и $t_2$ — несмещенные оценки функции $\tau$ с минимальной дисперсией. Тогда $t_1(x)=t_2(x)$ $\mathscr{P}$-почти наверное, т. е.

$$P_\theta\{t_1(x)=t_2(x)\}=1 \ \forall\theta$$

(другими словами, статистики $t_1$ и $t_2$ эквивалентны).

**Замечание.** Если $t_1$ и $t_2$ — векторные н.о.м.д. функции $\tau$, то для всякого вектора $c\in R^m$ оценки $(c, t_1)$ и $(c, t_2)$ являются н.о.м.д. функции $(c, \tau)$ и, значит, $(c, t_1)=(c, t_2)$ $\mathscr{P}$-п.н., что влечет $t_1=t_2$ $\mathscr{P}$-п.н.

**Неравенство Крамера—Рао.** Предположим, что статистическая структура $(X, \mathscr{A}, \mathscr{P}=\{P_\theta, \theta\in\Theta\})$ допускает функцию правдоподобия (ф.п.)

$$L(x|\theta)=\frac{dP_\theta}{d\mu}(x)$$

по некоторой мере $\mu$ на $(X, \mathscr{A})$. Рассмотрим еще н.о. $t$ функции $\tau$.

Считаем, что $\Theta$ есть открытое множество прямой $R^1$, $t$ и $\tau$ — числовые функции. Кроме того, функции $L$, $t$ и $\tau$ удовлетворяют **условию регулярности:**

1) Множество $\{x: L(x|\theta)>0\}$ не зависит от $\theta$. В этом случае, не ограничивая общности, можно считать $L(x|\theta)>0$ $\forall x, \theta$.

2) Функция $L(x|\theta)$ дифференцируема по $\theta$ и

$$\frac{d}{d\theta}\int_X L(x|\theta)\,\mu(dx)=\int_X \frac{d}{d\theta}L(x|\theta)\,\mu(dx),$$

$$\frac{d}{d\theta}\int_X t(x)\,L(x|\theta)\,\mu(dx)=\int_X t(x)\frac{d}{d\theta}L(x|\theta)\,\mu(dx).$$

3) Функция $\tau$ дифференцируема.

**Теорема 1.** (Неравенство Крамера—Рао). Если $t$ есть н.о. функции $\tau$ с конечным вторым моментом, то

$$\mathrm{var}_\theta t \geqslant \frac{[\tau'(\theta)]^2}{E_\theta\left(\frac{d}{d\theta}\ln L\right)^2} \quad \forall\theta.$$

Это неравенство превращается в равенство, если и только если

$$\frac{d}{d\theta}\ln L=A(\theta)\,[t(x)-\tau(\theta)] \quad (\mu=\text{п. в.})$$

для некоторой числовой функции $A(\theta)$.

**Замечание 1.** Если ф. п. $L$ дважды дифференцируема по $\theta$ и

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\int L(x\,|\,\theta)\,\mu(dx)=\int\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}L(x\,|\,\theta)\,\mu(dx),$$

то

$$E_\theta\left(\frac{\partial\ln L}{d\theta}\right)^2=-E_\theta\frac{\partial^2\ln L}{\partial\theta^2},$$

и, значит,

$$\mathrm{var}_\theta\, t\geqslant-\frac{[\tau'(\theta)]^2}{E_\theta\dfrac{\partial^2\ln L}{\partial\theta^2}}\quad\forall\theta.$$

**Замечание 2.** Приведем условия, при которых

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int_X f(x,\ \theta)\,\mu(dx)=\int_X\frac{\partial}{\partial\theta}f(x,\ \theta)\,\mu(dx).\qquad(*)$$

Пусть $f$ — числовая функция, определенная на $X\times\Theta$, где $\Theta$ — открытое множество прямой $R^1$ и $\mu$ — мера на измеримом пространстве $(X,\ \mathscr{A})$. Предположим, что

1) для всякого $\theta\in\Theta$ функция $x\to f(x,\ \theta)$ интегрируема по мере $\mu$;

2) для всякого $x\in X$ функция $\theta\to f(x,\ \theta)$ дифференцируема;

3) производная $\partial f/\partial\theta$ удовлетворяет условию

$$\left|\frac{\partial}{\partial\theta}f(x,\ \theta)\right|\leqslant g(x),$$

где $g$ — интегрируемая (по мере $\mu$) функция.

Тогда функция

$$\int_X f(x,\ \theta)\,\mu(dx)$$

дифференцируема по $\theta$ и выполнено $(*)$.

**Эффективные оценки.** Правая часть неравенства Крамера — Рао есть (для каждого $\theta$) нижняя граница дисперсии несмещенной оценки. Несмещенные оценки, для которых эта граница достигается, назы-

ваются **эффективными**. Ясно, что эффективная оценка есть н. о. м. д. и, значит, она единственная. Следующая теорема указывает способ получения эффективных оценок (и, значит, н. о. м. д.).

**Теорема 2.** Чтобы н. о. $t$ функции $\tau$ была эффективной, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L = A(\theta)[t(x)-\tau(\theta)] \quad (\mu\text{-п. в.}),$$

где $A$ — есть некоторая функция лишь от $\theta$. При этом $\operatorname{var}_\theta t(x) = \tau'(\theta)/A(\theta)$.

**Оценки максимального правдоподобия.** Полезным приемом получения разумных оценок является метод максимального правдоподобия. По этому методу оценка $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x)$ получается из условия

$$L(x|\hat{\theta}) \geqslant L(x|\theta) \quad \forall\theta,$$

т. е.

$$L(x|\hat{\theta}) = \max_{\theta} L(x|\theta).$$

Такие оценки называются оценками максимального правдоподобия или сокращенно о. м. п.

Если $\Theta\subset R^s$, для всякого $x\in X$ функция правдоподобия $L(x|\theta)$ дифференцируема по $\theta$ и достигает своего максимума во внутренней точке (принадлежащей $\Theta$ с некоторой ее окрестностью), то о. м. п. $\hat{\theta}$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial}{\partial\theta}L=0, \text{ или } \frac{\partial}{\partial\theta}\ln L=0 \text{ при } \theta=\hat{\theta},$$

где $\dfrac{\partial}{\partial\theta}L$ есть вектор

$$\frac{\partial}{\partial\theta}L=\left\{\frac{\partial L}{\partial\theta_1}, \ldots, \frac{\partial L}{\partial\theta_s}\right\} \text{ для } \theta=(\theta_1, \ldots, \theta_s)\in\Theta.$$

Оценка $t_n$, зависящая от количества наблюдений $n$, называется состоятельной оценкой (сокращенно — с. о.) параметра $\theta$, если последовательность $\{t_n\}$ сходится к 0. Как правило, в этом случае под сходимостью понимается сходимость по вероятности, т. е.

$$P_\theta\{|t_n-\theta|\geqslant\varepsilon\}\to 0$$

для всякого $\varepsilon>0$ (и любого $\theta$!).

В общем случае, если оценивается не сам параметр, а некоторая функция от этого параметра, скажем $\tau(\theta)$, то оценка $t_n$ называется с.о. функции $\tau(\theta)$, если для любого $\theta$ последовательность $t_n \to \tau(\theta)$ по вероятности $(P_\theta)$.

**Замечание 3.** Хотя требование состоятельности оценки является желательным для любого правила оценивания, но это требование никаким образом не связано со свойством оценки при фиксированном объеме наблюдений. Состоятельность — свойство последовательности оценок (при возрастающем объеме наблюдений). В этом смысле лучше говорить, что состоятельна не оценка $t_n$, а последовательность $\{t_n\}$ оценок. Так, если $t_n$ — состоятельная оценка, то

$$t'_n = \begin{cases} \theta_0 & \text{при } n \leqslant 2^{64}, \\ t_n & \text{при } n > 2^{64} \end{cases}$$

есть также состоятельная оценка. Конечно, если некоторый метод получения оценок приводит к несостоятельным оценкам, то состоятельность этого метода сомнительна.

**Метод наименьших квадратов.**

**Пример 1.** Предположим, что наблюдения $x_1, \ldots, x_n$ представляются в форме

$$x_i = \theta + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $\theta$ — неизвестный параметр и $\varepsilon_i$ — случайная ошибка наблюдения (измерения). Требуется оценить (истинное) значение параметра $\theta$. Будем исходить из того, что значение $\sum_1^n \varepsilon_i^2$ должно быть минимальным. Это приводит к оценке

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n) = \bar{x}.$$

Такой метод оценивания называется методом наименьших квадратов (МНК).

**Пример 2.** Теперь предположим, что наблюдения $x_1, \ldots, x_n$ представляются в форме

$$x_i = \theta_0 + \theta_1 t_i + \varepsilon_i,$$

где $\theta=(\theta_0, \theta_1)$ — неизвестный параметр, числа $t_1, \ldots, t_n$ известны, $\varepsilon_i$ — случайная ошибка наблюдения (например, измеряется функция $x(t|\theta)=\theta_0+\theta_1 t$, зависящая от $\theta_0$ и $\theta_1$ линейно, с ошибками измерения $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ в точках $t_1, \ldots, t_n$). Согласно МНК оценка $\hat{\theta}$ минимизирует сумму квадратов ошибок

$$\sum_1^n \varepsilon_i^2 = \sum_1^n (x_i - \theta_0 - \theta_1 t_i)^2 \text{ по } \theta.$$

Будем исходить из следующей линейной модели наблюдений:

$$x = A\theta + \varepsilon, \quad E\varepsilon = 0, \quad \operatorname{var}\varepsilon = \sigma^2 I,$$

где

$x=(x_1, \ldots, x_n)'$ — вектор наблюдений (сл. вектор);
$\theta=(\theta_1, \ldots, \theta_s)'$ — неизвестный параметр;
$\varepsilon=(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)'$ — вектор ошибок наблюдения (сл. вектор);

$$\operatorname{var}\varepsilon = E(\varepsilon - E\varepsilon)(\varepsilon - E\varepsilon)' = E\varepsilon\varepsilon' = \{E\varepsilon_i\varepsilon_j\}.$$

Например, если сл. в. $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ независимы, одинаково распределены: $E\varepsilon_i=0$, $E\varepsilon_i^2=\sigma^2$, то $\operatorname{var}\varepsilon=\sigma^2 I$, где $I=I_n$ — единичная матрица порядка $n\times n$. Матрица $A$ порядка $n\times s$ ($n$ строк, $s$ столбцов) считается известной.

Метод наименьших квадратов состоит в нахождении $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x)$ из условия

$$\min_\theta (\varepsilon, \varepsilon) = \min_\theta |x - A\theta|^2 = |x - A\hat{\theta}|^2.$$

Такая оценка $\theta$ называется **МНК-оценкой**.

**Теорема 3.** $A'A\hat{\theta}=A'x$.

Это уравнение называется **нормальным**.

**Предположение.** $\det(A'A)\neq 0$.

**Следствие.** $\theta=Bx$, где $B=(A'A)^{-1}A'$.

**Теорема 4.**

1°. $E\hat{\theta}=\theta$, т. е. $\hat{\theta}$ есть несмещенная оценка параметра $\theta$.

2°. $\operatorname{var}\hat{\theta}=\sigma^2(A'A)^{-1}$.

3°. $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n-s}|x - A\hat{\theta}|^2$ есть несмещенная оценка для $\sigma^2$.

Пусть $\Delta$ — класс несмещенных линейных оценок параметра $\theta$.

**Теорема 5** (Гаусса — Маркова). $\mathrm{var}_\theta \hat{\theta} \leqslant \mathrm{var}_\theta t \forall \theta$ и $t \in \Delta$.

**Замечание 4.** Векторы $\hat{\theta}$ и $x - A\hat{\theta}$ некоррелированны.

**Замечание 5.** Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — собственные значения матрицы $A'A$ (размерности $s \times s$). При $n \to \infty$

$$E|\hat{\theta} - \theta|^2 \to 0 \Leftrightarrow \min(\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \to +\infty.$$

### ЗАДАЧИ 181—191

**181.** Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — независимые одинаково распределенные сл. в. с плотностью распределения вида

$$f(y|\theta) = \begin{cases} k(\theta)\, y e^{-y^2/\theta^2}, & 0 \leqslant y < \infty, \\ 0, & y < 0;\ \theta > 0. \end{cases}$$

Показать, что

$$t(x) = \frac{1}{n} \sum_1^n x_k^2, \quad x = (x_1, \ldots, x_n),$$

есть н. о. м. д. для $\theta^2$.

**182.** Пусть сл. в. $x_1, \ldots, x_n$ независимы, и каждая имеет распределение с плотностью

$$f(y|\theta) = \begin{cases} k(\theta)\, y^2 \exp\left\{-\frac{y^3}{\theta^3}\right\}, & 0 \leqslant y < \infty. \\ 0, & y < 0;\ \theta > 0. \end{cases}$$

Показать, что

$$t(x) = \frac{1}{n} \sum_1^n x_k^3, \quad x = (x_1, \ldots, x_n),$$

есть н. о. м. д. для $\theta^3$.

**183.** Пусть $L(x|\theta)$ — функция правдоподобия независимых одинаково распределенных сл. в. $x_1, \ldots, x_n$; $x = (x_1, \ldots, x_n)$; при этом каждая сл. в. $x_k$ симметрична относительно нуля, т. е. сл. в. $x_k$ и $-x_k$ одинаково распределены. Обозначим через $M(y|\theta)$ функцию правдо-

подобия сл.в. $y_1, \ldots, y_n$, где $y_k = |x_k|$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Показать, что

$$M(y|\theta) = 2^n L(y|\theta) \quad \text{при } y_1 > 0, \ldots, y_n > 0.$$

**184.** Пусть сл. наблюдения $x_1, \ldots, x_n$ имеют вид $x_k = |w_k|^\alpha$, где $\alpha \neq 0$, а сл.в. $w_1, \ldots, w_n$ независимы и распределены по нормальному закону $N(0, \theta)$. Найти полную достаточную статистику и н.о.м.д. параметра $\theta$.

**185.** Предположим, что наблюдения $x_1, \ldots, x_n$ независимы и распределены равномерно на отрезке $[0, \theta]$ с неизвестным правым концом $\theta > 0$. Показать, что о.м.п. $\hat{\theta}_n$ состоятельна и

$$E_\theta \hat{\theta}_n = \frac{n}{n+1}\theta, \quad \operatorname{var}_\theta \hat{\theta}_n = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}\theta^2,$$

$$E_\theta(\hat{\theta}_n - \theta)^2 = \frac{3n+2}{(n+1)^2(n+2)}\theta^2.$$

**186.** Рассмотрим последовательность оценок $t_n$ функции $\tau(\theta)$ параметра $\theta$. Предполагается, что оценки $t_n$ и функция $\tau(\theta)$ принимают значения в одном и том же метрическом пространстве $(E, \rho)$. Показать, что если последовательность оценок $t_n$ функции $\tau(\theta)$ состоятельна, т. е. $\forall \theta$ и $\delta > 0$

$$P_\theta\{\rho(t_n, \tau(\theta)) \geqslant \delta\} \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

то последовательность оценок $f(t_n)$ функции $f(\tau(\theta))$ состоятельна; здесь $f$ — непрерывное отображение метрического пространства $(E, \rho)$ в метрическое пространство $(M, d)$.

**187.** Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — независимые сл.в., распределенные по нормальному закону $N(\mu, \sigma^2)$. Показать, что $\hat{\theta}_n = (\hat{\mu}, \hat{\sigma})$, где

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_1^n x_k, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n (x_k - \bar{x})^2, \quad \hat{\sigma} \geqslant 0,$$

есть о.м.п. параметра $\theta = (\mu, \sigma)$, $\sigma \geqslant 0$. Показать еще, что оценка $\hat{\theta}_n$ состоятельна.

**188.** Пусть сл.в. $x_1, \ldots, x_n$ независимы и каждая имеет распределение с плотностью вида

$$f(y|\theta) = e^{-(y-\theta)}, \text{ если } -\infty < \theta \leqslant y < \infty.$$

Показать, что

$$t(x)=\min(x_1,\ldots,x_n),\quad x=(x_1,\ldots,x_n),$$

есть о. м. п. Доказать состоятельность этой оценки.

**189.** Сл. в. $x_1,\ldots,x_n$ независимы и каждая имеет нормальное распределение $N(\theta, 2\theta)$. Показать, что

$$\hat{\theta}_n=\sqrt{1+\frac{1}{n}\sum_1^n x_k^2}-1$$

есть о. м. п. Доказать состоятельность этой оценки.

**190.** Пусть $x_1,\ldots,x_n$ — независимые сл. векторы-столбцы, распределенные по нормальному закону $N_r(\mu, A)$. Показать, что о. м. п. $\hat{\theta}_n=(\hat{\mu}, \hat{A})$ параметра $\theta=(\mu, A)$ состоятельна; здесь

$$\hat{\mu}=\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_1^n x_k;\quad \hat{A}=\frac{1}{n}\sum_1^n (x_k-\bar{x})(x_k-\bar{x})'.$$

**191.** Пусть $\mathcal{F}$ — семейство распределений $F$, сосредоточенных на $[0,1]$, имеющих непрерывную функцию плотности $f$; $0\leqslant f(x)\leqslant c=\text{const}$. Предположим, что числовые наблюдения $x_1,\ldots,x_n$ независимы и имеют одинаковое распределение $F\in\mathcal{F}$.

1) Показать, что $\hat{F}$ есть о. м. п. для $F$, если и только если $\hat{F}\in\mathcal{F}$ и $f(x_i)=c\ \forall i$, где $f$ — плотность распределения $\hat{F}$.

2) Привести пример несостоятельной о. м. п. $\hat{F}$ для $F$.

3) Привести пример состоятельной о. м. п. $\hat{F}$ для $F$.

4) Привести пример асимптотически нормальной о. м. п. $\hat{F}$ для $F$, т. е. такой о. м. п. $\hat{F}$, что для любых непрерывных на $[0,1]$ функций $g_1,\ldots,g_m$ оценка $t(x)=\{t_1(x),\ldots,t_m(x)\}$ является асимптотически нормальной для $\tau(F)=\{\tau_1(F),\ldots,\tau_m(F)\}$. Здесь $x=(x_1,\ldots,x_n)$,

$$t_i=(g_i,\hat{F})=\int_0^1 g_i\,d\hat{F},\quad \tau_i(F)=(g_i,F)=\int_0^1 g_i\,dF.$$

**РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 181—191**

**181. Решение 1.** Достаточно показать, что $t(x)$ есть эффективная оценка $\theta^2$. Найдем $k(\theta)$. Имеем

$$1 = \int_0^\infty f(y \mid \theta)\, dy = k(\theta)\frac{\theta^2}{2}\int_0^\infty e^{-y^2/\theta^2} d\frac{y^2}{\theta^2} = k(\theta)\frac{\theta^2}{2},$$

откуда $k(\theta) = 2\theta^{-2}$. Теперь функция правдоподобия имеет вид

$$L(x \mid \theta) = f(x_1 \mid \theta) \ldots f(x_n \mid \theta) =$$

$$= 2^n \theta^{-2n} (x_1 \ldots x_n) \exp\left\{-\frac{1}{\theta^2}\sum_1^n x_k^2\right\}$$

при $x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0$. Так как

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln L = -\frac{2n}{\theta} + \frac{2}{\theta^3}\sum_1^n x_k^2 = \frac{2n}{\theta^3}[t(x) - \theta^2] =$$

$$= A(\theta)[t(x) - \tau(\theta)],$$

то $t(x)$ является эффективной оценкой $\tau(\theta) = \theta^2$ (и $\operatorname{var}_\theta t(x) = \tau'(\theta)/A(\theta) = \theta^4/n$).

**Решение 2.** Так как функция правдоподобия имеет вид

$$L(x \mid \theta) = [k(\theta)]^n (x_1 \ldots x_n) \exp\left\{\frac{1}{\theta^2}\sum_1^n x_k^2\right\} \cdot I_{\{x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0\}}$$

то $t(x)$ есть полная достаточная статистика. Достаточно теперь показать несмещенность оценки $t(x)$ относительно $\theta^2$ или $E_\theta x_1^2 = \theta^2$. Как и при решении 1, находим $k(\theta) = 2\theta^{-2}$. Теперь

$$E_\theta x_1^2 = \frac{2}{\theta^2}\int_0^\infty y^2 \cdot y e^{-y^2/\theta^2} dy = \theta^2 \int_0^\infty u e^{-u}\, du = \theta^2,$$

где было положено $u = y^2/\theta^2$.

**182.** Аналогично решениям предыдущей задачи. Другое решение можно получить, исходя из следующего утверждения: если $\xi_k = x_k^3/\theta^3$, то сл. в. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и каждая имеет экспоненциальное распределение $1 - e^{-y}$, $y \geqslant 0$ (для предыдущей задачи в этом случае следует положить $\xi_k = x_k^2/\theta^2$).

**183.** Обозначим $F_\theta$ и $f_\theta$ распределение и плотность распределения сл. в. $x_1$. Аналогичные функции, соответствующие сл. в. $y_1$, обозначим через $G_\theta$ и $g_\theta$. Тогда

$$L(x|\theta)=f_\theta(x_1)\ldots f_\theta(x_n),\quad M(y|\theta)=g_\theta(y_1)\ldots g_\theta(y_n).$$

Достаточно показать, что $g_\theta(v)=2f_\theta(v)$ при $v>0$. Это следует из равенств

$$G_\theta(v)=P(y_1<v)=P(-v<x_1<v)=P(x_1<v)-$$
$$-P(x_1\leqslant -v)=P(x_1<v)-P(-x_1\geqslant v)=P(x_1<v)-$$
$$-[1-P(-x_1<v)]=2P(x_1<v)-1=2F_\theta(v)-1.$$

**184.** Статистика

$$T(x)=\frac{1}{n}\sum_1^n w_k^2=\frac{1}{n}\sum_1^n x^{\frac{2}{\alpha}},\quad x=(x_1,\ldots,x_n),$$

является полной достаточной и является н. о. м. д. параметра $\theta$.

**185.** О. м. п. $\hat\theta=\hat\theta_n=\max(x_1,\ldots,x_n)$. Найдем распределение сл. в. $\hat\theta$:

$$P_\theta(\hat\theta<u)=P_\theta(x_1<u,\ldots,x_n<u)=\prod_1^n P_\theta(x_k<u)=\left(\frac{u}{\theta}\right)^n$$

при $0\leqslant u\leqslant\theta$. Отсюда

$$E_\theta\hat\theta=\int_0^\theta u\cdot n\frac{u^{n-1}}{\theta^n}\,du=\frac{n}{n+1}\theta,$$

$$E_\theta\hat\theta^2=\int_0^\theta u^2\cdot n\frac{u^{n-1}}{\theta^n}\,du=\frac{n}{n+2}\theta^2,$$

$$P_\theta(|\hat\theta-\theta|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{E_\theta|\hat\theta-\theta|^2}{\varepsilon^2}=\frac{1}{(n+1)^2(n+2)}\left(\frac{\theta}{\varepsilon}\right)^2,$$

$$\varepsilon>0.$$

**186.** $\forall\varepsilon>0$, $x_0\in E$ $\exists\delta>0$ такое, что $d(f(x),f(x_0))\geqslant\varepsilon$ влечет $\rho(x,x_0)\geqslant\delta$. В частности, если $x_0=\tau(\theta)$, то

$$P_\theta\{d(f(t_n),f(\tau(\theta)))\geqslant\varepsilon\}\leqslant P_\theta\{\rho(t_n,\tau(\theta))\geqslant\delta\}\to 0.$$

**187.** Первое утверждение следует из того, что

$(\hat{\mu}, \hat{\sigma^2})$ есть о. м. п. для $(\mu, \sigma^2)$ и биективности отображения

$$R^1 \times R_+^1 \ni (\mu, \sigma^2) \leftrightarrow (\mu, \sigma) \in R^1 \times R_+^1.$$

Второе утверждение следует из предыдущей задачи.

**188.** Так как

$$f(y|\theta) = e^{-(y-\theta)} I_{(y \geqslant \theta)}, \quad y \in R^1,$$

то функция правдоподобия представляется в виде

$$L(x|\theta) = \exp\left\{-\sum_1^n x_k + n\theta\right\} \cdot I_{(\min\limits_k x_k \geqslant \theta)} =$$

$$= e^{n\theta} I_{\{t(x) \geqslant \theta\}} \exp\left\{-\sum_1^n x_k\right\}$$

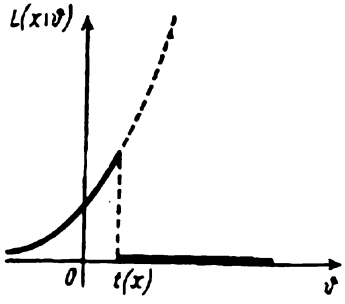



Рис. 9

(см. рис. 9). Отсюда следует, что $t(x)$ есть о. м. п. Остается убедиться, что плотность распределения сл. в. $t(x)$ имеет вид

$$f_\theta(t) = ne^{-n(t-\theta)} I_{\{t \geqslant \theta\}},$$

откуда находим

$$E_\theta t(x) = \theta + \frac{1}{n}, \quad E_\theta t(x)^2 = \left(\theta + \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n^2},$$

$$\operatorname{var}_\theta t(x) = \frac{1}{n^2},$$

$$P_\theta\{|t(x) - \theta| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} E_\theta [t(x) - \theta]^2 = \frac{2}{(\varepsilon n)^2}, \quad \varepsilon > 0.$$

**189.** О. м. п. находится обычным образом среди экстремальных точек функции правдоподобия

$$L(x|\theta) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\theta}} \exp\left\{-\frac{1}{2 \cdot 2\theta}(x_k - \theta)^2\right\} -$$

$$= (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \theta^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{4\theta}\sum_1^n (x_k-\theta)^2\right\},$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L = -\frac{n}{2\theta} + \frac{1}{2\theta}\sum_1^n (x_k-\theta) + \frac{1}{4\theta^2}\sum_1^n (x_k-\theta)^2 =$$

$$= \frac{1}{4\theta^2}\left[\sum_1^n (x_k-\theta)^2 + 2\theta\sum_1^n (x_k-\theta) - 2\theta n\right] =$$

$$= \frac{1}{4\theta^2}\left[-n\theta^2 - 2\theta n + \sum_1^n x_k^2\right] =$$

$$= -\frac{n}{4\theta^2}\left[\theta^2 + 2\theta - \frac{1}{n}\sum_1^n x_k^2\right].$$

Так как на концах интервала $(0, \infty)$ изменения $\theta$ функция $L(x|\theta)$ обращается в нуль, то о. м. п. есть положительное решение квадратного уравнения

$$\theta^2 + 2\theta - \frac{1}{n}\sum_1^n x_k^2 = 0.$$

Проверим состоятельность о. м. п. $\hat{\theta}_n$. Согласно закону больших чисел

$$t_n = \frac{1}{n}\sum_1^n x_k^2 \to E_\theta x_1^2 = \operatorname{var}_\theta x_1 + (E_\theta x_1)^2 = 2\theta + \theta^2$$

по вероятности. Теперь согласно задаче 36

$$\hat{\theta}_n = f(t_n) = \sqrt{1+t_n} - 1 \to f(2\theta+\theta^2) =$$
$$= \sqrt{1+2\theta+\theta^2} - 1 = \theta$$

по вероятности.

**190.** Следует из закона больших чисел и представления

$$\hat{A} = \frac{1}{n}\sum_1^n (x_k-\mu)(x_k-\mu)' - (\bar{x}-\mu)(\bar{x}-\mu)'.$$

**191.** 1) Функция правдоподобия равна

$$L(x\,|\,f)=\prod_{1}^{n} f(x_i),$$

где роль параметра структуры играет плотность $f\in\mathscr{F}$. Ясно, что наибольшее значение достигается, если и только если $f(x_i)=c$, $i=\overline{1,\ n}$.

2) Пусть $0<x_{(1)}<x_{(2)}<\ldots<x_{(n)}<1$ — порядковые статистики, $x_{(0)}=0$, $x_{(n+1)}=1$. Положим

$$\hat{f}_n(x)=\begin{cases}0, & x_{(i)}<x\leqslant x_{(i)}+\dfrac{1}{2}(x_{(i+1)}-x_{(i)}),\\ 2, & x_{(i)}+\dfrac{1}{2}(x_{(i+1)}-x_{(i)})<x\leqslant x_{(i+1)}.\end{cases}$$

Тогда при $c=2$ оценка $\hat{f}_n$ есть о. м. п. и, например, для $f=1$ на $[0,1]$

$$P\{|\hat{f}_n(x)-f(x)|>\varepsilon\}=1$$

при всех $0<\varepsilon<1$, $x\in[0,1]$, так как $|\hat{f}_n(x)-1|=1$.

3) При $c=1$ оценка $\hat{f}_n(x)=1$ для всех $x\in[0,1]$ состоятельна, так как в этом случае семейство $\mathscr{F}$ содержит единственное распределение с плотностью $f=1$, т. е. $\hat{f}_n=f$.

## § 3. ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ. СТАТИСТИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ. ФУНКЦИЯ МОЩНОСТИ. ЛЕММА НЕЙМАНА — ПИРСОНА

**Интервальные оценки.** Пусть вновь $(X, \mathscr{A}, \mathscr{P}=\{P_\theta,\ \theta\in\Theta\})$ — статистическая структура. Отображение $S$

$$X\ni x\rightarrowtail S(x)\subset\Theta$$

такое, что

$$S^{-1}(\theta)=\{x:\theta\in S(x)\}\in\mathscr{A} \text{ для всех } \theta\in\Theta \qquad (*)$$

называется **интервальной оценкой.**

**Замечание 1.** Условие $(*)$ требуется для того, чтобы были определены вероятности

$$P_\theta\{\theta\in S(x)\}\quad\forall\theta\in\Theta \qquad (**)$$

(обратно: из того, что определены вероятности $(**)$, следует $(*)$). Отметим еще, что вероятность $(**)$ есть вероятность того, что случайное множество $S(x)$ содержит истинное значение параметра $\theta$ (как всегда,

наблюдение, т. е. сл. в. $x$, имеет распределение из семейства $\mathscr{P}=\{P_\theta,\ \theta\in\Theta\}$, а выражение «$\theta$ есть истинное значение параметра» означает: «наблюдение $x$ имеет распределение $P_\theta$»).

**Замечание 2.** Отображение $S(x)$ называют также доверительной оценкой, или множественной оценкой, или доверительным множеством.

Число

$$1-\alpha=\inf_{\theta} P_\theta\{\theta\in S(x)\}$$

называется **коэффициентом доверия** интервальной оценки $S(x)$, а число $\alpha$ называется **уровнем** (значимости) интервальной оценки. В частности,

$$P_\theta\{\theta\in S(x)\}\geqslant 1-\alpha \quad \forall\theta\in\Theta.$$

Интервальная оценка уровня $\alpha$ называется **свободной**, если

$$P_\theta\{\theta\in S(x)\}=1-\alpha \quad \forall\theta.$$

**Статистический критерий.** Предположение вида $\theta\in\Theta_0$, где $\Theta_0$ — непустое подмножество множества $\Theta$, называется гипотезой и обозначается часто в виде $H_0$ или $H_0:\theta\in\Theta_0$. Иногда поступают проще (и рациональнее): всякое непустое подмножество множества $\Theta$ называют гипотезой. И лишь желание различать понятия «предположение» и «множество» заставляет использовать разные символы $H_0$ и $\Theta_0$.

Гипотеза $H_0:\theta\in\Theta_0$ называется простой, если $\Theta_0$ состоит из одного элемента, и сложной, если гипотеза не является простой.

Наряду с основной (или нулевой) гипотезой $H_0:\theta\in\Theta_0$ рассматривают альтернативную, или конкурирующую, гипотезу $H_1:\theta\in\Theta_1$. При этом должно быть $\Theta_0\cap\Theta_1=\varnothing$. В этом случае часто $H_0$ и $H_1$ называют просто гипотезой и альтернативой.

Итогом всякого статистического анализа двух гипотез $H_0$ и $H_1$ должно быть правило, которое наблюдению $x$ ставит в соответствие одно из двух решений: принять гипотезу $H_0$ или альтернативу $H_1$. Такое правило называют критерием. В этой связи вводится следующее определение. Критерий есть статистика со значениями в $[0,1]$. Критерием гипотезы $H_0$ при альтернативе $H_1$ называется критерий $\varphi$, приписывающий гипотезам $H_0$ и $H_1$ вероятности $1-\varphi(x)$ и $\varphi(x)$ соответственно.

Таким образом, если $\varphi$ есть критерий гипотезы $H_0$ при альтернативе $H_1$, то по наблюдению $x$ с вероятностью $\varphi(x)$ принимается альтернатива $H_1$ (отвергается основная гипотеза $H_0$), а с вероятностью $1-\varphi(x)$ принимается гипотеза $H_0$.

Если $\varphi(x)=0$ или 1 для всех $x$, то, полагая

$$C=\{x\in X:\varphi(x)=1\} \qquad (*)$$

(тем самым, $\varphi(x)$ оказывается индикатором множества $C$), имеем, что если наблюдение $x$ попадает в множество $C$, то принимается гипотеза $H_1$, в противоположном случае принимается основная гипотеза $H_0$. Такое множество $C$ называется **критическим**.

**Замечание.** В общем случае, если

$$\varphi(x)[1-\varphi(x)]=0 \quad P_\theta\text{-п. н.} \quad \forall\theta\in\Theta_0\cup\Theta_1,$$

то множество $(*)$ называется критическим, а критерий $\varphi$ называется нерандомизированным.

**Функция мощности.** Качество критерия $\varphi$ обычно характеризуется **функцией мощности** $\beta_\varphi:\Theta\to[0,1]$

$$\beta_\varphi(\theta)=E_\theta\varphi(x), \quad \theta\in\Theta$$

(это есть вероятность отвергнуть основную гипотезу $H_0$, когда наблюдение $x$ имеет распределение $P_\theta$).

Число

$$\alpha_\varphi=\sup_{\theta\in\Theta_0}\beta_\varphi(\theta)$$

называется размером, или уровнем (значимости) критерия $\varphi$, а сужение функции $\beta_\varphi$ на $\Theta_1$ (т. е. функция $\beta_\varphi$, рассматриваемая лишь на $\Theta_1$) называется **мощностью** критерия $\varphi$.

Действуя по критерию $\varphi$, можно прийти либо к правильному решению, либо совершить одну из двух ошибок: отвергнуть основную гипотезу $H_0$, когда она верна (это ошибка первого рода) или принять основную гипотезу $H_0$, когда она неверна (это ошибка второго рода).

Так как нельзя требовать от критерия, чтобы он одновременно минимизировал вероятности ошибок первого и второго рода, приходится идти на компромисс: ограничивать сверху вероятность ошибки 1-го рода и минимизировать максимальную вероятность ошибки 2-го рода.

**Определение 1.** Критерий $\varphi$ проверки гипотезы $H_0: 0 \in \Theta_0$ при альтернативе $H_1: \theta \in \Theta_1$ называется равномерно наиболее мощным (РНМ), если для всякого критерия $\psi$ выполнено

$$\alpha_\psi \leqslant \alpha_\varphi \Rightarrow \beta_\psi(\theta) \leqslant \beta_\varphi(\theta) \qquad \forall \theta \in \Theta_1$$

(и, значит, $1-\beta_\psi(\theta) \leqslant 1-\beta_\varphi(\theta)$ $\forall \theta \in \Theta_1$, т. е. вероятность ошибки 2-го рода для критерия $\varphi$ равномерно по $\theta$ меньше или равна вероятности ошибки 2-го рода для критерия $\psi$; иными словами мощность критерия $\varphi$ равномерно по $\theta$ больше или равна мощности критерия $\psi$).

**Определение 2.** Критерий $\varphi$ проверки гипотезы $H_0$ при альтернативе $H_1$ называется максиминным, если для всякого критерия $\psi$ выполнено

$$\alpha_\psi \leqslant \alpha_\varphi \Rightarrow \inf_{\theta \in \Theta_1} \beta_\psi(\theta) \leqslant \inf_{\theta \in \Theta_1} \beta_\varphi(\theta)$$

(правая часть означает еще, что максимальная вероятность ошибки 2-го рода для критерия $\varphi$ меньше или равна максимальной вероятности ошибки 2-го рода для критерия $\psi$; в этой связи критерий $\varphi$ называют не максиминным, а минимаксным).

Очевидно, что РНМ критерий является максиминным, а в случае простой альтернативной гипотезы $H_1$ максиминный критерий является РНМ.

**Лемма Неймана — Пирсона.** Предположим, что гипотезы $H_0$ и $H_1$ являются простыми, имеют вид $H_0: \theta = \theta_0$ и $H_1: \theta = \theta_1$. Положим

$$p_0(x) = \frac{dP_{\theta_0}}{d\mu}(x), \quad p_1(x) = \frac{dP_{\theta_1}}{d\mu}(x),$$

где $\mu$ — некоторая мера, доминирующая распределения $P_{\theta_0}$ и $P_{\theta_1}$ (например, $\mu = P_{\theta_0} + P_{\theta_1}$). Отметим, что в терминах функции правдоподобия

$$p_0(x) = L(x|\theta_0), \quad p_1(x) = L(x|\theta_1).$$

Предполагается еще, что $P_{\theta_0} \neq P_{\theta_1}$.

**Лемма 1°.** Существование. Для всякого числа $\alpha \in [0, 1]$ существуют критерий $\varphi$ и константа $\lambda$ такие, что

$$\text{и} \qquad E_0\varphi(x) = \alpha, \quad \text{где} \quad E_0 = E_{\theta_0}, \qquad (*)$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad p_1(x)>\lambda p_0(x),\\ 0 & \text{при} \quad p_1(x)<\lambda p_0(x).\end{cases} \qquad (**)$$

2°. Достаточность. Если критерий $\varphi$ удовлетворяет (*) и (**) при некотором $\lambda$, то он является наиболее мощным критерием уровня $\alpha$ для проверки $H_0$ при альтернативе $H_1$.

3°. Необходимость. Если $\varphi$ является наиболее мощным критерием уровня $\alpha$, то при некотором $\lambda$ выполнено (**) $\mu$-почти всюду. Кроме того, выполнено (*), кроме случая, когда существует критерий мощности 1 и уровня $<\alpha$.

**Замечание.** Так как гипотеза $H_1$ простая, то в понятии РНМ критерия нет необходимости использовать «равномерность».

### ЗАДАЧИ 192—199

**192.** Сл. наблюдения $x_1, \ldots, x_n$ независимы и равномерно распределены в $(0, \theta)$ с неизвестным правым концом $\theta$. Положим $T(x)=\max(x_1, \ldots, x_n)$. Показать, что интервал с концами $T(x)$ и $T(x)\varepsilon^{-1/n}$ есть интервальная оценка параметра $\theta>0$ уровня $\varepsilon$, $0<\varepsilon<1$.

**193.** Пусть $S(x)$ — интервальная оценка (числового) параметра $\theta$ и

$$|S(x)|=\int_{S(x)} d\theta$$

есть длина интервала $S(x)$. Показать, что

$$E_{\theta_0}|S(x)|=\int_{\Theta} P_{\theta_0}\{\theta \in S(x)\}\, d\theta.$$

**194.** Предположим, что наблюдения $x_1, \ldots, x_n$ представляются в виде

$$x_k=\theta_0+\theta_1 t_k+\varepsilon_k, \quad k=1, \ldots, n,$$

где $t_k=k$, $\theta=(\theta_0, \theta_1)'$ — неизвестный параметр; сл. ошибки наблюдения $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ независимы и каждая имеет нормальное распределение $N(0, \sigma^2)$. Обозначим через $\hat{\theta}=(\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1)'$ МНК-оценку параметра $\theta$. Показать, что

$$\operatorname{var}\hat{\theta}_1=\frac{12}{n(n^2-1)}\sigma^2.$$

**195.** (Продолжение.) Показать, что

$$\operatorname{var}\widehat{\theta}_0 = \frac{4}{n}\left[1 + \frac{3}{2(n-1)}\right]\sigma^2.$$

**196.** (Продолжение.) Обозначим через

$$f(t) = \widehat{\theta}_0 + \widehat{\theta}_1 t$$

статистическую функцию регрессии. Показать, что

$$Ef(t) = \theta_0 + \theta_1 t, \quad \operatorname{var} f(t) = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{\sum_1^n (t_k - t)^2}{\sum_1^n (t_k - \bar{t})^2},$$

где

$$\bar{t} = \frac{1}{n}\sum_1^n t_k.$$

**197.** Пусть $P_0$ — равномерное распределение в интервале $(0, 1)$, $P_1$ — равномерное распределение в интервале $(1, 2)$. Показать, что следующие критерии проверки распределения $P_0$ при конкурирующем распределении $P_1$:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \alpha, & x \in (0, 1), \\ 1, & x \in (1, 2), \end{cases} \quad \varphi_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in [\alpha, 1), \\ 1, & x \in (0, \alpha) \cup (1, 2), \end{cases}$$

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 1,$$

являются РНМ критериями уровня $\alpha$.

**198.** Показать, что критерий $\varphi$, минимизирующий $\alpha_1 + \alpha_2$ имеет вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } p_1(x) > kp_0(x), \\ 0 & \text{при } p_1(x) < kp_0(x). \end{cases}$$

**199.** Пусть $(X, \mathscr{A}, \mathscr{P} = \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\})$ — статистическая структура, $D$ — пространство возможных решений, $L$ — функция потерь, $R$ — функция риска, $\Delta$ —

допустимый класс решающих процедур (р. п.). Класс $\Delta_0 \subset \Delta$ называется допустимым, если $\forall \delta \in \Delta \ \exists \delta_0 \in \Delta_0$, что $R(\delta_0|\theta) \prec R(\delta|\theta) \ \forall \theta$.

Предположим, что $\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$, $D = \{d_1, d_2\}$, $L(d_i|\theta_i) = 0$, $L(d_i|\theta_j) > 0$ при $i \neq j$. Показать, что класс байесовских р. п. допустим.

## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 192—199

**192.** Случайные величины $y_i = x_i/\theta$, $i = \overline{1, n}$, независимы, и каждая имеет равномерное распределение в (0, 1). Согласно задаче 181 сл. в. $\xi = \max(y_1, \ldots, y_n)$ имеет ф. р. $F(x) = x^n$, $0 < x < 1$. Теперь

$$P_\theta\{T(x) < 0 < T(x)\varepsilon^{-1/n}\} = P_\theta\{\xi < 1 < \xi\varepsilon^{-1/n}\} =$$
$$= P_\theta\{\xi > \varepsilon^{1/n}\} = 1 - F(\varepsilon^{1/n}) = 1 - \varepsilon.$$

**193.** Положим

$$\varphi(\theta, x) = \begin{cases} 1, & \theta \in S(x), \\ 0, & \theta \overline{\in} S(x). \end{cases}$$

По теореме Фубини о повторных интегралах

$$E_{\theta_0}|S(x)| = E_{\theta_0} \int_{S(x)} d\theta = E_{\theta_0} \int_\Theta \varphi(\theta, x)\, d\theta = \int_\Theta E_{\theta_0} \varphi(\theta, x) =$$
$$= \int_\Theta P_{\theta_0}\{\theta \in S(x)\}\, d\theta.$$

**194.** В данном случае

$$x = A\theta + \varepsilon, \quad E\varepsilon = 0, \quad \operatorname{var} \varepsilon = \sigma^2 I_n,$$

где

$$x = (x_1, \ldots, x_n)', \quad \varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)', \quad \theta = (\theta_0, \theta_1)', \quad A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{bmatrix}.$$

Напомним, что $\{\operatorname{cov}(\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j)\} = \operatorname{var}\hat{\theta} = \sigma^2 (A'A)^{-1}$, так что если $\operatorname{var}\hat{\theta} = V = \{v_{ij}\}$, то

$$\operatorname{var}\hat{\theta}_0 = v_{11}, \quad \operatorname{var}\hat{\theta}_1 = v_{22}.$$

Имеем

$$W = A'A = \begin{bmatrix} n & \sum t_i \\ \sum t_i & \sum t_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix},$$

$$\sum_1^n t_i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_1^n t_i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$W^{-1} = \frac{1}{|W|} \begin{bmatrix} w_{22} & -w_{12} \\ -w_{21} & w_{11} \end{bmatrix},$$

откуда $\operatorname{var} \hat{\theta} = \sigma^2 W^{-1}$ и, значит,

$$\operatorname{var} \hat{\theta}_0 = \sigma^2 \frac{1}{|W|} \cdot w_{22}, \quad \operatorname{var} \hat{\theta}_1 = \sigma^2 \frac{1}{|W|} w_{11},$$

$$\operatorname{cov}(\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1) = -\sigma^2 \frac{w_{12}}{|W|};$$

в данном случае имеем, что

$$|W| = w_{11}w_{22} - w_{12}^2 = n \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \frac{n^2(n^2-1)}{12},$$

откуда

$$\operatorname{var} \hat{\theta}_1 = \frac{12}{n(n^2-1)} \sigma^2.$$

**195.** См. решение предыдущей задачи. Так как

$$\operatorname{var} \hat{\theta}_0 = \frac{w_{22}}{|W|} \sigma^2, \quad w_{22} = \sum_1^n t_i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$|W| = \frac{n^2(n^2-1)}{12},$$

то

$$\operatorname{var} \hat{\theta}_0 = \frac{2(2n+1)}{n(n-1)} \sigma^2 = \frac{4}{n}\left[1 + \frac{3}{2(n-1)}\right] \sigma^2.$$

**196.** Имеем, что $\operatorname{var} f(t) = \operatorname{var} \hat{\theta}_0 + t^2 \operatorname{var} \hat{\theta}_1 + 2t \operatorname{cov}(\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1)$. Так как (см. задачу 194)

$$\operatorname{var} \hat{\theta}_0 = \frac{w_{22}}{|W|} \sigma^2, \quad \operatorname{var} \hat{\theta}_1 = \frac{w_{11}}{|W|} \sigma^2,$$

$$\operatorname{cov}(\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1) = -\frac{w_{12}}{|W|}\sigma^2,$$

то

$$\operatorname{var} f(t) = \frac{\sigma^2}{|W|}[w_{22} - 2tw_{12} + t^2 w_{11}].$$

Но

$$w_{22} - 2tw_{12} + t^2 w_{11} = \sum_1^n t_i^2 - 2t\sum_1^n t_i + t^2 n = \sum_1^n (t_i - t)^2;$$

$$|W| = w_{11}w_{22} - w_{12}^2 = n\sum t_i^2 - \left(\sum t_i\right)^2 = n\sum_1^n (t_i - \bar{t})^2,$$

откуда и следует искомая формула для $\operatorname{var} f(t)$.

**197.** Следует из определения РНМ критерия, так как, полагая $E_0 = E_{P_0}$, $E_1 = E_{P_1}$, имеем $E_0\varphi_1 = E_0\varphi_2 = \alpha$, $E_1\varphi_1 = E_1\varphi_2 = 1$.

**198.** Обозначим вероятности ошибок 1-го и 2-го рода произвольного критерия $\psi$ соответственно через $\alpha_1(\psi)$ и $\alpha_2(\psi)$. Имеем:

$$\alpha_1(\psi) + \alpha_2(\psi) = E_0\psi + E_1(1 - \psi) =$$

$$= 1 + E_0\psi - E_1\psi = 1 + \int \psi(x)[p_0(x) - p_1(x)]\,\mu(dx) =$$

$$= 1 + \int\limits_{p_0 > p_1} \psi(p_0 - p_1)\,d\mu + \int\limits_{p_0 < p_1} \psi(p_0 - p_1)\,d\mu \geqslant$$

$$\geqslant 1 + \int\limits_{p_0 > p_1} 0\cdot(p_0 - p_1)\,d\mu + \int\limits_{p_0 < p_1} 1\cdot(p_0 - p_1)\,d\mu =$$

$$= 1 + \int\limits_{p_0 > p_1} \varphi(p_0 - p_1)\,d\mu + \int\limits_{p_0 < p_1} \varphi(p_0 - p_1)\,d\mu =$$

$$= \alpha_1(\varphi) + \alpha_2(\varphi).$$

**199.** Возьмем в качестве допустимого класса $\Delta$ класс всех измеримых отображений $\delta : X \to \{d_1, d_2\}$, причем решающие правила, равные $\mathcal{P}$-п. н., не будем различать. Через $\Phi$ обозначим класс всех нерандомизированных критериев гипотезы $H_0 : \theta = \theta_1$ при альтернативе $H_1 : \theta = \theta_2$, причем равные $\mathcal{P}$-п. н. критерии не будем различать. Имеем биекцию

$$\Delta \ni \delta \leftrightarrow \varphi \in \Phi,$$

где

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & \delta(x)=d_1,\\ 0, & \delta(x)=d_2.\end{cases}$$

Аналогично решению задачи 198 доказывается, что при любых $c_1\geqslant 0$, $c_2\geqslant 0$ критерий

$$\varphi^*(x)=\begin{cases}1, & c_1p_1<c_2p_2,\\ 0, & c_1p_1>c_2p_2\end{cases}$$

минимизирует $c_1\alpha_1+c_2\alpha_2$.

Заметим, что байесовский риск решающего правила $\delta$ при априорном распределении $(\pi_1, \pi_2)$ $(\pi_i\geqslant 0, \pi_1+\pi_2=1)$ равен

$$R(\delta)=R(\delta\,|\,\theta_1)\,\pi_1+R(\delta\,|\,\theta_2)\,\pi_2=\alpha_1\pi_1L(d_2\,|\,\theta_2)+$$

$$+\alpha_2\pi_2L(d_1\,|\,\theta_2)=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2,$$

при $c_1=\pi_1L(d_2\,|\,\theta_1)$, $c_2=\pi_2L(d_1\,|\,\theta_2)$. Следовательно, решающее правило $\delta^*$, соответствующее критерию $\varphi^*$,— байесовское. Заметим, что

$$R(\delta\,|\,\theta_j)\geqslant R(\delta^*\,|\,\theta_j),\quad j=1,\ 2\Leftrightarrow\alpha_j\geqslant\alpha_j^*,\quad j-1,\ 2$$

(так как $R(\delta\,|\,\theta_1)=\alpha_1L(d_2\,|\,\theta_1)$, $R(\delta\,|\,\theta_2)=\alpha_2L(d_1\,|\,\theta_2)$). Следовательно, для доказательства допустимости байесовского класса достаточно показать, что

$$\forall\,\varphi\in\Delta\ \exists\,(c_1,\ c_2),\ \text{что}\ \alpha_j\geqslant\alpha_j^*,\quad j=1,\ 2.$$

Последнее следует из леммы, приведенной выше в тексте параграфа.